

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**JOSUE ERVIN MUSIAL**

**TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICAS APLICADAS EM  
TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA**

Curitiba-PR

2010

**JOSUE ERVIN MUSIAL**

**TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICAS APLICADAS EM  
TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, na Área de Concentração em Programação Matemática do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos.

Orientador: Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro - UFPR

Curitiba-PR  
2010

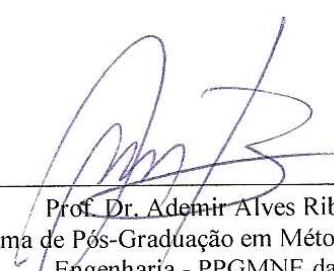
# TERMO DE APROVAÇÃO

JOSUÉ ERVIN MUSIAL

## TÉCNICAS DE RECONSTRUÇÃO ALGÉBRICAS APLICADAS EM TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

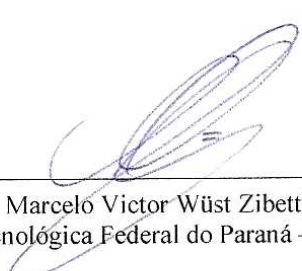
Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:




---

Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em  
Engenharia - PPGMNE da UFPR



---

Prof. Dr. Marcelo Victor Wüst Zibetti  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR



---

Prof. Dr. Celso Carnieri  
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em  
Engenharia - PPGMNE da UFPR

Curitiba, 3 de setembro de 2010.

À Deus, minha família, Zizelane e amigos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a todos que me ajudaram e me apoiaram, entre os quais não posso deixar de citar meu orientador professor Ademir, que colaborou muito, tornando essa jornada bem mais tranquila. Minha família, porque sem o apoio deles eu não teria estrutura para chegar até o final desse projeto, a minha irmã Bernadete e a Zizelane pelo força diária. Aos amigos do CESEC em geral e a nossa querida secretária Maristela, uma amiga de todos os momentos. Agradeço também a CAPES-Reuni pelo apoio financeiro e a todos os funcionários do Cesec.

## Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>vi</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>x</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>xi</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>xii</b>
<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Medicina diagnóstica e aplicações</b> .....	<b>3</b>
1.1 Evolução histórica .....	3
1.1.1 Ecografia ou ultra-som .....	5
1.1.2 Ressonância magnética .....	6
1.2 Técnicas que utilizam radiação ionizante .....	9
1.2.1 Radiografias convencionais .....	9
1.2.2 Tomografia computadorizada .....	10
1.3 Aplicações em outras áreas .....	17
<b>2 Conceitos Matemáticos e Físicos</b> .....	<b>20</b>
2.1 Bases Matemáticas .....	20
2.1.1 Sistemas Lineares .....	20
2.1.2 Matrizes .....	21
2.1.3 Produto interno e ortogonalidade .....	22
2.1.4 Problema dos Mínimos Quadráticos .....	24

2.1.5	Sequências e Limites de Sequências .....	26
2.2	Conceitos Físicos .....	27
2.2.1	Ondas .....	27
2.2.2	Produção de raios-x e radiações .....	28
2.2.3	Interação das radiações com a matéria .....	29
<b>3</b>	<b>O problema, o algoritmo e a convergência .....</b>	<b>32</b>
3.1	Discretização do problema .....	32
3.2	Métodos iterativos .....	41
3.2.1	Os métodos de Kaczmarz e Cimmino .....	42
3.3	O problema de reconstrução de imagem .....	43
3.4	O método de relaxação e sua convergência .....	44
3.5	Métodos de relaxação para equações lineares .....	49
<b>4</b>	<b>Resultados .....</b>	<b>51</b>
4.1	Obtenção do conjunto de dados .....	52
4.2	Qualidade da reconstrução obtida .....	53
4.3	Construção do Aplicativo .....	55
4.4	Resultados obtidos .....	56
	<b>Conclusão .....</b>	<b>58</b>
4.1	Considerações .....	58
4.2	Sugestões para Pesquisas Futuras .....	58
	<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>59</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1 Radiografia da mão de sua esposa, Anna Bertha Ludwig, obtida por Röntgen em 22 de dezembro de 1895. A “primeira radiografia” .....	4
1.2 Imagem de um aparelho e de um exame de ultra-som. ....	6
1.3 Imagem de um exame de ressonância magnética. ....	8
1.4 Aparelho de ressonância magnética. ....	8
1.5 Equipamento de raios X digital. ....	9
1.6 Radiografia de tórax. ....	10
1.7 Tomógrafo .....	11
1.8 Tomografia PET [29, UNICAMP] .....	12
1.9 Colimadores e perda de dados em SPECT. ....	12
1.10 Sistema de Tomografia Eletromagnética [9, FIGUEROA, 2005]. ....	13
1.11 Escaneamento no tomógrafo de 1ª geração .....	14
1.12 Escaneamento no tomógrafo de 2ª geração .....	15
1.13 Escaneamento no tomógrafo de 3ª geração .....	15
1.14 4ª geração .....	16
1.15 Estudo de solos colapsíveis .....	17
1.16 Utilização de maquinário no plantio. ....	17
1.17 Plantio direto em palha .....	18
1.18 Tomógrafo .....	18
2.1 Ângulo entre dois vetores. ....	22
2.2 Projeção ortogonal entre dois vetores. ....	23
2.3 Problema dos mínimos quadrados. ....	25
3.1 Nas ampliações da imagem digital podemos visualizar os pixels. ....	32



3.2	Exemplo .....	33
3.3	Exemplo .....	33
3.4	O problema a ser resolvido. ....	34
3.5	Coleta de dados. ....	35
3.6	Representação da seção transversal .....	35
3.7	Interação entre os fótons e o objeto. ....	36
3.8	Varredura de uma linha. ....	37
3.9	Varredura horizontal e vertical.....	38
3.10	Discretização do problema .....	39
4.1	Exemplo. ....	51
4.2	Medições. ....	51
4.3	Ilustração geométrica do algoritmo. ....	52
4.4	Reconstrução do exemplo. ....	52
4.5	Shepp-Logan um Phantom clássico. ....	53
4.6	Compara a imagem gerada com o modelo ideal (figura adaptada de [13, HERMAN, 1980]).....	54
4.7	Interface do aplicativo. ....	56
4.8	Reconstrução com resolução $30 \times 30$ pixels. ....	56
4.9	Reconstrução com resolução $40 \times 40$ pixels. ....	57
4.10	Reconstrução com resolução $40 \times 40$ pixels. ....	57
4.11	Reconstrução com resolução $40 \times 40$ pixels. ....	57

## LISTA DE TABELAS

2.1	Números de CT de alguns órgãos com $E_{Ef} = 80keV$ . .....	31
-----	---	----

## RESUMO

Nesta dissertação apresentamos brevemente algumas técnicas de diagnóstico por imagem, fazendo uma apresentação mais completa das diferentes modalidades de tomografia computadorizada. Apresentamos o problema da reconstrução de imagens e fazemos a discussão dos algoritmos de reconstrução utilizados em tomografia bem como uma discussão sobre a convergência do algoritmo de projeção ortogonal, detalhada no Capítulo 3. Criamos alguns Phantoms virtuais, sobre os quais simulamos as varreduras e medições que serão utilizadas na reconstrução das imagens através do algoritmo apresentado. Para a reconstrução desenvolvemos um aplicativo experimental no Programa Visual Basic 6, com o qual obtemos as reconstruções de imagens e avaliamos os erros na reconstrução obtida.

Palavras-chave: Tomografia Computadorizada, Reconstrução de Imagens, Implementação Computacional.

## **ABSTRACT**

In this dissertation we briefly present some techniques of diagnostic imaging, making a more complete presentation for different modalities of computer tomography. We present the problem of image reconstruction and discuss reconstruction algorithms used in computer tomography, as well as convergence of orthogonal projection algorithm, detailed in Chapter 3. We created some virtual Phantoms, on which we simulated scans and measurements that will be used to reconstruct images, using the presented algorithm. For the reconstruction we developed an experimental application in Visual Basic 6. With that application we reconstruct images and evaluate the present errors.

**Key-words:** Computed Tomography, Reconstruction of Images, Computational Implementation.

## Introdução

No passado a humanidade tratava suas enfermidades por meio de poções com ervas, raízes ou até mesmo promovia ritos religiosos. As pesquisas incessantes fizeram a Medicina evoluir muito no campo científico e trouxe a possibilidade de observar internamente os órgãos do paciente sem usar procedimentos invasivos.

Desde que o primeiro passo na área dos diagnósticos por imagem foi dado por Wilhelm Conrad Röntgen em 1895, quando descobriu os *raios X* que possibilitaram gerar imagens radiográficas, outras técnicas como a tomografia computadorizada, a ecografia e a ressonância magnética foram desenvolvidas para a obtenção de imagens de seções internas. As aplicações de todas essas técnicas não se restringiram somente as áreas médicas, mas se disseminaram por muitas áreas científicas onde foram usadas como ferramenta ou como objeto de estudo e desenvolvimento.

Este trabalho dissertativo contempla uma exposição de algumas técnicas de diagnóstico por imagem. Entretanto, o foco principal está nas técnicas de reconstrução algébrica de imagens por projeção [13, HERMAN, 1980] e no desenvolvimento de uma base teórica necessária para justificá-las, além é claro de sua aplicação na medicina diagnóstica, especificamente em tomografia computadorizada.

Para estudar a reconstrução algébrica de imagens por projeção, além dos resultados encontrados na literatura, desenvolvemos um aplicativo no “VISUAL BASIC 6”, capaz de simular medições e reconstruir as imagens através dos dados obtidos. Criamos várias imagens de teste, os “Phantoms”, e sobre eles simulamos as medições, como num tomógrafo, obtendo os dados necessários para as reconstruções. Os dados armazenados nas medições são utilizados pelos algoritmos iterativos de reconstrução por projeção, gerando finalmente as imagens reconstruídas.

No capítulo 1 apresentamos uma evolução histórica dos acontecimentos que julgamos mais importantes no desenvolvimento da medicina diagnóstica, juntamente com uma breve descrição sobre cada uma dessas técnicas. Destacamos o desenvolvimento da tomografia computadorizada, as várias gerações de aparelhos e as técnicas de reconstrução. Também apresentamos alguns exemplos de aplicações da tomografia computadorizada em áreas diferentes da medicina diagnóstica.

No capítulo 2 apresentamos a base teórica matemática, cálculo, álgebra linear e análise, que usaremos nesta dissertação para a modelagem do problema da tomografia computadorizada e

dos algoritmos utilizados. Apresentamos ainda algumas definições e conceitos físicos envolvidos nesse problema.

No capítulo 3 introduzimos o problema de reconstrução de imagens por projeção, seu surgimento em tomografia computadorizada e como podemos resolvê-lo através de algoritmos computacionais. Também apresentamos uma discussão sobre a convergência destes algoritmos.

No capítulo 4 apresentamos a construção de um aplicativo e os respectivos resultados alcançados.

Finalmente apresentamos algumas conclusões e propostas de trabalhos futuros, bem como as referências bibliográficas utilizadas.

# 1 Medicina diagnóstica e aplicações

O desenvolvimento das técnicas de reconstrução de imagens possibilitou grandes avanços nos mais diferentes campos científicos e tecnológicos. Entretanto o grande destaque destas técnicas ainda está nas áreas da saúde. Elas permitem aos profissionais da saúde observar os órgãos internamente sem a necessidade de um procedimento invasivo. Hoje, podemos além de observar as alterações morfológicas, acompanhar os processos metabólicos instantaneamente e até mesmo observar o sistema nervoso do paciente em funcionamento.

Nesse capítulo apresentamos um relato histórico com as principais contribuições e descobertas para o desenvolvimento das várias técnicas de diagnóstico por imagem, bem como uma breve descrição de algumas dessas técnicas e suas aplicações. Entretanto, a tomografia computadorizada, seu desenvolvimento e suas aplicações em medicina e outras áreas são o nosso foco principal.

## 1.1 Evolução histórica

Historicamente, o primeiro passo no desenvolvimento das técnicas de diagnóstico por imagem foi dado pelo físico alemão Wilhelm Conrad Röntgen [19, KAK e SLANEY, 1988](1845-1923), em seus experimentos com raios catódicos (feixes de elétrons), quando notou a luminescência em certos materiais mas, principalmente a capacidade que esses raios tem de atravessar materiais impressionando filmes fotográficos. Como até então não eram conhecidos, eles foram batizados de *raios X*. Dentre as muitas experiências feitas por Röntgen com os raios X, a de maior destaque foi a geração de imagens radiográficas que marca o início dos diagnósticos por imagem em medicina. A Figura 1.1 mostra um resultado da experiência de Röntgen.

A descoberta da radioatividade natural também teve grande relevância na evolução das técnicas de imagens internas e da física em geral. Foi obtida pelo físico francês Antoine Henri Becquerel quando estudava uma possível relação entre a fosforescência do Urânio na presença de raios X e observou que o Urânio também tinha a capacidade de impressionar filmes fotográficos. Destacamos ainda a descoberta da radioatividade do elemento Radônio, em 1898, pelo casal Pierre e Marie Curie. Essas descobertas renderam aos três o prêmio Nobel em Física no ano de 1903.



Figura 1.1: Radiografia da mão de sua esposa, Anna Bertha Ludwig, obtida por Röntgen em 22 de dezembro de 1895. A “primeira radiografia”.

A diferença entre os raios X descobertos por Röntgen e os raios- $\gamma$  (radiação natural) está na sua origem. Enquanto os raios X são produzidos pelo choque de elétrons com um anteparo metálico, a radiação  $\gamma$  é emitida naturalmente pelo núcleo de elementos radioativos (decaimento radioativo). Tanto os raios X como os raios- $\gamma$  podem ser usados nos processos de obtenção de imagens de seções internas.

A solução para o problema de reconstrução de imagens através de suas projeções, utilizado posteriormente na reconstrução de imagens em tomografia computadorizada foi encontrada muito antes da invenção da tomografia, por J. H. Radon [2, ARAÚJO, 2008] em 1917. Em seu trabalho, Radon mostra como é possível reconstruir uma imagem de corte transversal utilizando infinitas projeções calculadas por integrais de linha. Os raios X e os raios- $\gamma$  tornaram possível a reconstrução das imagens, pois permitem estimar as medidas das projeções pela atenuação dos feixes de fótons que atravessam os meios materiais.

Mais tarde, em 1963, A. M. Cormack [5, CORMACK, 1963], [6, CORMACK, 1964] descreve um modelo para o cálculo das atenuações de raios X no interior do corpo humano utilizando um número finito de projeções e assim inicia os primeiros experimentos em tomografia. Finalmente em 1972 o engenheiro Britânico G. N. Hounsfield desenvolveu o primeiro aparelho de tomografia computadorizada. Ambos Hounsfield e Cormack receberam o prêmio Nobel de Medicina e Fisiologia em 1979.

Apresentamos neste trabalho as principais técnicas que permitem obter imagens internas, do corpo humano, de outro ser vivo ou de um objeto em estudo. Bem como um estudo dos conceitos físicos e matemáticos envolvidos na solução do problema comum a cada uma delas que é a obtenção de imagens internas.

Podemos dividir as técnicas de reconstrução de imagens em duas classes [10, GERALDES e SIMÕES, 1987]: aquelas que não utilizam radiação ionizante para obter as imagens, cujos



exemplos são a ressonância magnética e a ultra-sonografia. E as técnicas que utilizam radiação ionizante (raios X, raios- $\gamma$ ) no processo de obtenção das imagens, como as radiografias e tomografias computadorizadas.

As técnicas que produzem imagens internas dos organismos vivos ou demais objetos sem utilizar radiações ionizantes nesse processo praticamente não agredem os organismos biológicos. Descrevemos brevemente duas dessas técnicas, pois não são o foco desse trabalho, entretanto nos ajudam a compreender e situar a importância de cada técnica.

### 1.1.1 Ecografia ou ultra-som

Essa técnica utiliza os ultra-sons [27, INCOR] que são ondas sonoras de alta frequência que não escutamos, pois estão entre 1 e 20 MHz muito acima da frequência sonora captada por nossos ouvidos que fica entre 20 e 20 000 Hz, para gerar as imagens. É uma técnica muito utilizada para examinar fetos em formação e muito vantajosa, pois não é agressiva aos organismos como as técnicas que utilizam radiações ionizantes dos raios X.

A *Piezoelasticidade* [4, BISCEGLI, 2004] é a capacidade de alguns cristais gerarem corrente elétrica como resposta a uma pressão mecânica. A descoberta do efeito piezoelétrico permitiu a utilização os ultra-sons na geração de imagens através dos aparelhos de ecografia. Como os ultra-sons são ondas mecânicas, necessitam de um meio material para se propagarem gerado vibrações durante essa propagação e, portanto, ficam sujeitos ao efeito piezoelétrico.

No aparelho de ecografia, ilustrado na Figura 1.2, uma onda sonora é produzida por um cristal com formato semelhante a uma caneta, o transdutor piezoelétrico. Fortes e curtos pulsos elétricos originados no aparelho de ultra-som fazem com que o transdutor emita som em uma determinada frequência. O som é direcionado pelo formato do transdutor ou por sistemas mais complexos de controle, sendo que esse direcionamento produz uma onda sonora em forma de arco. A onda se move para dentro do corpo do paciente e atinge o foco em uma determinada profundidade sendo parcialmente refletido pelas camadas formadas por diferentes tecidos do corpo. O retorno das ondas sonoras faz vibrar o transdutor, que transforma as vibrações em pulsos elétricos que se deslocam para um conjunto de detectores, o scanner. O scanner envia as informações para um computador que processa os dados e os transforma em uma imagem digital.

O scanner determina três informações de cada eco recebido:

1. Quanto tempo levou desde a transmissão até a recepção do eco;

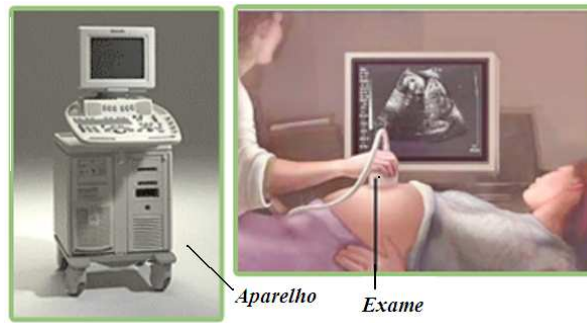


Figura 1.2: Imagem de um aparelho e de um exame de ultra-som.

2. A partir do intervalo de tempo, calcula a distância (profundidade) onde o foco se formou, possibilitando uma imagem nítida do eco na dada profundidade;
3. Qual a intensidade do eco.

Quando o scanner determina estas três informações, ele pode alocar cada pixel da imagem em uma intensidade.

A transformação do sinal recebido em uma imagem pode ser explicada utilizando-se uma planilha como analogia. Suponha o transdutor está localizado na primeira linha, ocupando várias colunas. Ele emite pulsos para baixo, em cada coluna da planilha e mede quanto tempo cada pulso leva para retornar. A intensidade do eco determina a cor que cada célula da coluna vai ter (branco para um eco forte, preto para um muito fraco, e graduações de cinza para as intensidades intermediárias). Resumindo, quando todos os ecos retornam e toda a informação está armazenada na planilha, a imagem está gerada.

### 1.1.2 Ressonância magnética

A ressonância magnética é uma técnica que utiliza um campo magnético muito forte e a propriedade que certos átomos têm em alinhar-se no mesmo sentido desse campo magnético e voltar ao estado inicial assim que o campo cessa emitindo energia em forma de radiofrequências. Assim a técnica fundamenta-se em três etapas distintas: alinhamento, excitação e detecção de radiofrequência.

O alinhamento se refere à propriedade magnética de núcleos de alguns átomos que contém número ímpar de prótons, nêutrons, ou ambos e que tendem a se orientar paralelamente a um campo magnético, como uma bússola em relação ao campo magnético da terra. Por razões físicas e pela abundância nos tecidos dos seres vivos, o núcleo de hidrogênio (próton) é o elemento utilizado para produzir imagens de seres vivos.

Em seu estado natural os átomos de hidrogênio tem um alinhamento aleatório e para que esses átomos sejam orientados em uma certa direção, é necessário um campo magnético intenso, cerca de 1,5 Teslas que é 30 mil vezes superior ao campo magnético da terra.

Cada núcleo de hidrogênio “vibra” numa determinada frequência que é proporcional ao campo magnético em que se encontra, determinado pela relação conhecida como frequência de Larmor:

$$\omega_0 = \gamma H_0,$$

onde  $\gamma$  é a razão giromagnética e  $H_0$  é o campo magnético externo. Deste modo se o campo magnético for de 1,5 T, o hidrogênio terá frequência de 63,8 MHz.

O aparelho de ressonância magnética emite uma onda eletromagnética nessa mesma frequência e a energia da onda emitida pelo equipamento é transmitida para os átomos de hidrogênio, fenômeno conhecido como ressonância, quando os núcleos de hidrogênio recebem a energia e modificam seu estado de desordem magnética passam a se orientar segundo o campo magnético.

Uma vez que o campo magnético cessa, os átomos de hidrogênio tornam-se novamente instáveis e tendem a retornar ao estado de desordem inicial, emitindo ondas eletromagnéticas na mesma frequência 63,8 MHz, faixa de ondas de rádio. Essa é a última etapa do exame, onde o equipamento detecta essas ondas e determina a posição no espaço e a intensidade da energia dada por

$$\Delta E = \hbar \omega_0 = \hbar \gamma H_0,$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck. Então após cessar o campo magnético o sinal é medido e chamado de sinal de decaimento de indutância livre  $S(t)$ , ou em inglês (Free Induction Decay - FID). Assumindo que o campo está na direção  $z$  perpendicular a  $x$  e  $y$  o sinal é dado por

$$S(t) = \int M_{xy}(\vec{r}, t) d^3 r,$$

que é uma função de ondulatória a qual tem sua localização espacial e intensidades de sinal calculadas pela *Transformada de Fourier*.

As imagens de ressonância magnética, ilustradas na Figura 1.3, têm maior capacidade de demonstrar diferentes estruturas no cérebro e têm facilidade em demonstrar mínimas alterações na maioria das doenças, bem como há maior sensibilidade para doenças desmielinizantes e processos infiltrativos. É também possível avaliar estruturas como hipocampos, núcleos da base e cerebelo (o qual é de difícil avaliação na TC). As alterações morfológicas são mais facilmente avaliadas do que na Tomografia Computadorizada.

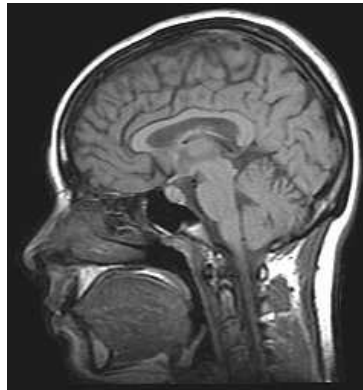


Figura 1.3: Imagem de um exame de ressonância magnética.

O aparelho de ressonância magnética, conforme ilustrado na Figura 1.4, é um túnel com cerca de 1,5 a 2,5 metros de comprimento e produz um ruído durante a emissão das ondas de radiofrequência e procedimento de localização do sinal. Esse ambiente é limitante para claustrofóbicos, contra-indicado para pacientes com marca-passo e “clips” de aneurismas (há ainda outras contra-indicações formais). Uma apresentação mais completa sobre ressonância pode ser encontrada em [10, GERALDES e SIMÕES, 1987].



Figura 1.4: Aparelho de ressonância magnética.

## 1.2 Técnicas que utilizam radiação ionizante

As técnicas que utilizam radiações ionizantes são mais agressivas aos organismos vivos que as técnicas que utilizam outros meios para obter imagens internas. A quantidade e o tempo de exposição às radiações durante a realização de um exame não causa nenhum dano sério ao organismo. Entretanto no caso de gestação recomenda-se precauções porque um feto em formação apresenta uma intensa reprodução celular e as radiações ionizantes podem causar

erros genéticos na formação das células.

### 1.2.1 Radiografias convencionais

A imagem de uma radiografia convencional [12, GORDON, HERMAN e JOHNSON, 1975] é produzida através da atenuação dos fótons de raios X causadas pelos diferentes materiais que compõe o objeto em estudo, no caso do corpo humano, as atenuações causadas pelos diferentes órgãos e tecidos. A detecção das atenuações de raios X é feita através de um filme semelhante ao filme fotográfico composto por camadas de plástico (poliéster) e camadas de sais de prata ( $AgBr, AgI$ ). Quando expostos a um fóton de raios X ou pela luz visível, o cátion de prata (íon positivo) acaba sendo neutralizado e vira prata metálica ( $Ag^0$ ) que escurece o filme radiográfico proporcionalmente a quantidade de raios X recebida durante o exame. Deste modo, o sal de prata que não foi sensibilizado pelo raios X fica transparente. A Figura 1.5 mostra um aparelho de raios X.

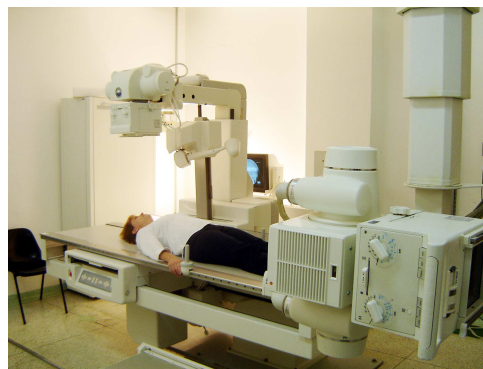


Figura 1.5: Equipamento de raios X digital.

A imagem radiográfica é obtida utilizando-se um feixe de raios X piramidal que vai incidir sobre o objeto, no nosso caso o paciente, perpendicularmente ao plano da imagem. De acordo com as densidades das diversas estruturas que foram atravessadas pelo raios X, haverá maior ou menor absorção destes raios, ocasionando diferentes atenuações as quais serão visíveis quando o filme radiográfico for revelado. Materiais densos como os metais por terem número atômico alto absorvem grande parte dos raios X e aparecem transparentes na radiografia, por outro lado o ar como é pouco denso não absorve raios X deixando o filme totalmente preto em torno do paciente.

A Figura 1.6 mostra um exame de radiografia onde podemos observar que os órgãos e tecidos do paciente aparecem sobrepostos conforme a projeção plana definida pelas emissões de raios X.

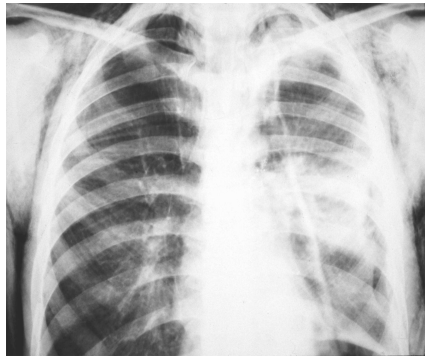


Figura 1.6: Radiografia de tórax.

### 1.2.2 Tomografia computadorizada

A palavra tomografia vem do grego, tomos (“corte” ou “fatia”) e graphia (“escrita”), ou seja, imagens de fatias do corpo humano. A tomografia é uma técnica utilizada para reconstruir imagens de partes internas dos objetos em estudo, apresentando imagens de seções internas e é superior às imagens de uma radiografia convencional.

Enquanto nas radiografias comuns as imagens das atenuações causadas pelas diferentes estruturas aparecem sobrepostas em uma única imagem, dificultando a identificação e distinção das diferentes estruturas internas, a tomografia computadorizada reconstrói imagens de várias seções do objeto em estudo em cortes transversais o que possibilita visualizar as camadas internas separadamente, inclusive a consistência interna das camadas. Nas áreas da saúde a tomografia tornou os diagnósticos mais precisos e promoveu diagnósticos que até então não eram possíveis. Foi a primeira técnica não invasiva a revelar imagens anatômicas sem sobreposição.

Existem diferentes tipos de tomografias e cada uma delas utiliza um princípio físico diferente para obter as imagens. Por exemplo, a tomografia de raios X utiliza a atenuação sofrida pelos feixes de raios X ao atravessar o objeto, já a tomografia por emissão utiliza informações sobre o decaimento de isótopos radioativos para gerar as imagens através das distribuições espaciais. Dentre as várias modalidades de tomografia destacamos as seguintes:

- Tomografia computadorizada de emissão única de fóton (SPECT - Single Photon Emission Computerized Tomography);
- Tomografia de emissão de pósitron (PET - Positron Emission Tomography);
- Tomografia elétrica subdividida em:
  - Tomografia de capacitância elétrica;
  - Tomografia de impedância elétrica;

- Tomografia de indutância eletromagnética.
- Tomografia de prótons;
- Tomografia computadorizada de raios X (TC).

Para realizar a tomografia precisamos de uma máquina para coletar os dados, um computador para armazenar e processar esses dados e um bom algoritmo de reconstrução utilizado para processar dos dados e gerar a imagem de cada seção transversal.

A Figura 1.7 mostra um tomógrafo utilizado nas tomografias de raios X. Consiste basicamente de uma mesa onde fica o paciente e de um conjunto emissor-detector. Do emissor partem as radiações, por exemplo feixes de raios X, e o conjunto de receptores mede a intensidade com que esses raios X chegam ao seu destino. Como as intensidades de emissão dos feixes são conhecidas, a atenuação total sofrida pelo feixe ao atravessar o paciente pode ser estimada.



Figura 1.7: Tomógrafo

Além da respectiva atenuação total, são armazenados ainda o receptor e o ângulo de inclinação em que a medida foi colhida e como o paciente está imóvel as seções das quais as imagens serão geradas também estão fixas. Assim podemos fixar a posição da malha que dará origem a imagem e portanto conhecer a coordenada de cada posição dessa malha. Todo esse conjunto de informações deve gerar cada uma das imagens das seções transversais.

A tomografia por emissão [23, PIERRO, 2001] tem como campo de estudo os processos fisiológico, como por exemplo, consumo de glicose, fluxo sanguíneo, neurotransmissão, e muitos outros. Se conhecemos um composto que é metabolizado durante um dado processo fisiológico como, por exemplo, a glicose que é muito consumida por tumores malignos dentro do organismo. O composto é então marcado com um isótopo radioativo que durante o exame emitirá radiação. No caso da glicose ela se concentrará nas regiões de maior consumo, dentre elas as cancerígenas, carregando consigo os isótopos radioativos responsáveis por destacar essas regiões durante o exame através da emissão das radiações.

Na tomografia de emissão de pósitron (PET) [17, HERMAN, ODHNER, 1991], o isótopo é artificial e decai emitindo pósitrons que logo colidem com um elétron gerando dois fótons em direções opostas, que são detectados por pares de detectores. Essa informação é armazenada para gerar as imagens. Na Figura 1.8 vemos uma ilustração do funcionamento da tomografia PET.

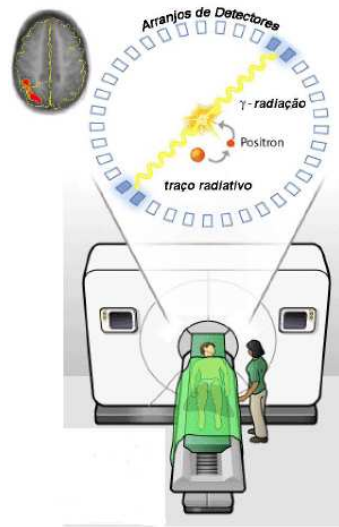


Figura 1.8: Tomografia PET [29, UNICAMP]

No caso de SPECT [8, EVANS, KEYESF, SMITH, 1986], utiliza-se um isótopo natural que decai gerando um único fóton. Na coleta de dados são utilizados colimadores para se determinar a reta suporte da partícula emitida. Muitos fótons são absorvidos pelo colimador antes de serem detectados, fazendo que os dados de SPECT sejam muito mais pobres que os de PET, e conseqüentemente as imagens são piores. A Figura 1.9 ilustra a perda de dados nos colimadores.

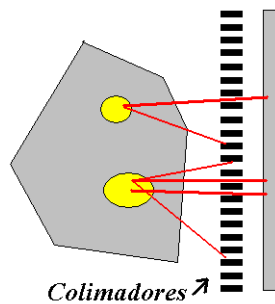


Figura 1.9: Colimadores e perda de dados em SPECT.

Vamos apresentar a Técnica Tomográfica Eletromagnética, que obtém as imagens através do uso de medidas de indutância. A técnica gera imagens a partir da distribuição de materi-



ais eletricamente condutivos e permeáveis magneticamente. Sua aplicação é em materiais que apresentam alta condutividade como, por exemplo, em separação de processos, localização e detecção de corpos estranhos, inspeção alimentícia e de componentes de metal com defeitos.

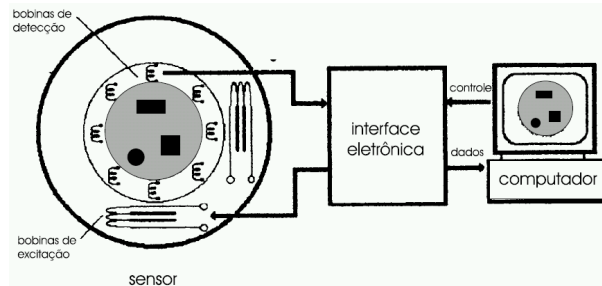


Figura 1.10: Sistema de Tomografia Eletromagnética [9, FIGUEROA, 2005].

Primeiramente a região de interesse é submetida a um campo magnético gerado por uma bobina. As medições são realizadas por uma bobina detectora obtendo os sinais ao redor de onde se deseja a imagem. Os sinais são digitalizados e enviados para um computador o qual através de algoritmos reconstrói a imagem. A Figura 1.10 mostra um diagrama de um sistema de tomografia eletromagnética.

A tomografia de prótons é muito parecida com a tomografia de raios X, ao invés dos raios X ela utiliza um feixe de prótons de alta energia durante as medições, mais detalhes podem ser vistos em [26, SETTI, 2006] e [7, CORMACK e KOEHLER, 1976]

### **Evolução dos tomógrafos por transmissão**

Desde a sua invenção em 1972 os tomógrafos foram sendo melhorados em busca de um projeto mecânico que proporcionasse uma redução no tempo do exame. Quanto mais rápido o exame é feito menos o paciente fica exposto aos raios X e quase não se movimenta durante o exame o que melhora a qualidade das imagens. Várias mudanças foram feitas na geometria da aquisição de dados o que possibilitou aumentar a resolução das imagens. Descreveremos agora brevemente essa evolução.

A primeira geração de tomógrafos foi produzida pela EMI Mark em 1973, tendo como desenvolvedor o engenheiro Hounsfield. O sistema era composto por um único tubo de raios X, o qual produzia um único feixe cilíndrico que atravessava o objeto em estudo, o paciente, atingindo o único detector que media a intensidade do mesmo. O sistema ainda contava com um par de colimadores (dois pequenos tubos metálicos colocados após o feixe deixar a fonte e antes do mesmo atingir o detector) para minimizar o espalhamento do feixe. A fonte de raios X e o detector se movem em sincronia e em lados opostos do paciente executando um escaneamento

linear sobre a seção em estudo seguido de uma rotação de 1 grau e um novo escaneamento linear é efetuado. Ao todo o sistema executava 180 varreduras lineares cada uma com rotação de 1 grau em torno da seção gastando aproximadamente 4 minutos e meio para cada seção. A espessura da seção era de 13 milímetros e a imagem gerada tinha dimensões de  $80 \times 80$  pixels a qual era gerada aproximadamente após 7 minutos de processamento computacional [2, ARAÚJO, 2008]. Na Figura 1.11 ilustramos como o escaneamento era realizado.

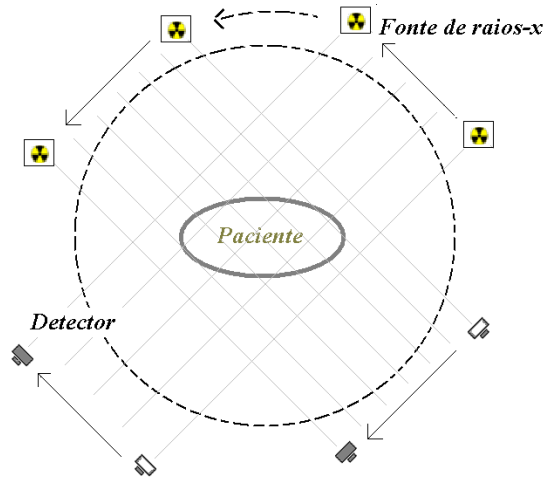


Figura 1.11: Escaneamento no tomógrafo de 1ª geração

Essa geração de aparelhos permitia apenas produzir imagens de partes do corpo sem movimento, portanto imagens do tórax eram inviáveis devido ao batimento cardíaco e a respiração do paciente tendo em vista o grande tempo gasto no escaneamento.

Os tomógrafos de segunda geração foram desenvolvidos visando reduzir o tempo de escaneamento minimizando a exposição do paciente à radiação e ampliando a gama de órgãos que podem ter a seção transversal reconstruída. Os tomógrafos ainda mantiveram o movimento de varredura linear seguida de uma rotação. Entretanto o feixe de raios X deixou de ser cilíndrico e passou a ter formato de leque. Ao invés de um único detector a sistema passou a contar com vários detectores alinhados de forma que possam receber todos os raios do feixe, cujos raios extremos formam um ângulo de 10 graus conforme na Figura 1.12. O número de rotações e translações cai de 180 para apenas 18 e o tempo de escaneamento passou a ficar entre 10 e 20 segundos. Dessa maneira, o tempo de obtenção de dados de uma seção foi reduzido de acordo com o número de detectores e com o ângulo de abertura empregado. Mas o tempo de obtenção de dados ainda era grande e não permitia realizar imagens do coração, por exemplo.

A terceira geração de aparelhos esquematizada na Figura 1.13 abandonou de vez os movimentos de translação do tubo de raios X e dos detectores e passou a contar com um leque com um ângulo maior e uma base de detectores mais ampla em formato semi-circular. O sistema

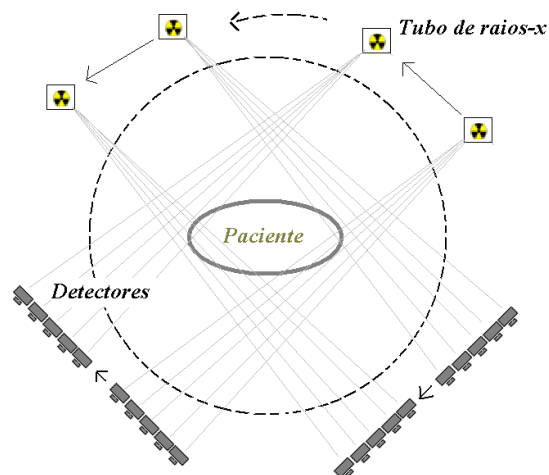


Figura 1.12: Escaneamento no tomógrafo de 2ª geração

passou a efetuar um movimento de 360 graus em torno da seção e o número de detectores ficava entre 300 e 1200. Também eram usados colimadores antes do feixe atingir os detectores a fim de minimizar o espalhamento dos raios X e garantir a qualidade das imagens. O tempo de cada varredura em alguns modelos comerciais passou a ser de apenas meio segundo.

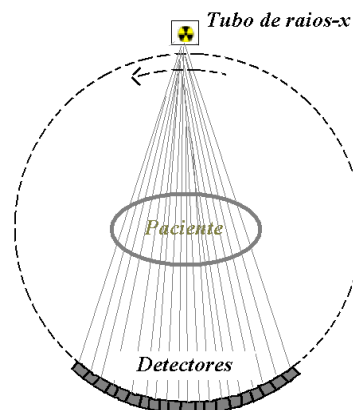


Figura 1.13: Escaneamento no tomógrafo de 3ª geração

A quarta geração de aparelhos cujo funcionamento está representado na Figura 1.14 passou a contar com um anel de detectores que circundam toda a seção ao redor do paciente que possibilitou aumentar mais ainda o ângulo do feixe de raios X. Os detectores são fixos e o tubo de raios X rotaciona dentro do anel de detectores e ao redor do corpo. Um problema desta geração diz respeito a recepção dos feixes que não são fixos e dependendo do ângulo um feixe pode atingir dois detectores ou acertar um detector apenas em uma fração. Portanto o espalhamento é inevitável e o uso de colimadores inviável devido a rotação da fonte de raios X que torna a faixa angular não constante. Algumas saídas tomadas foram o preenchimento da matriz de detecção com um número de elementos de detecção o que aumenta o custo desses aparelhos. Pode-se

ainda aumentar o diâmetro dos detectores o que reduz a resolução espacial das imagens. Outra medida é aumentar a distância entre os detectores de tamanho menor tornando a aquisição de dados incompleta e sub-utilizando os feixes de raios X [2, ARAÚJO, 2008].

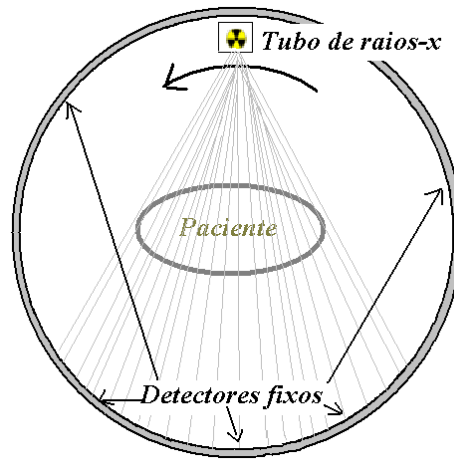


Figura 1.14: 4ª geração

Como o tempo despendido para realização de movimentos mecânicos é a principal limitação para reduzir ainda mais os tempos de escaneamento a quinta geração de aparelhos acabou com os movimentos de translação e rotação da fonte e dos detectores. Um aparelho dessa natureza foi desenvolvido nos Estados Unidos pela Mayo Clinic e contava com um conjunto de 14 tubos de raios X e uma matriz de detectores fixa. As emissões de raios X ocorriam em sequência e sem movimentações permitindo aquisição de imagens em curto tempo. O aparelho ainda executa movimentos em torno do paciente para otimizar a resolução espacial.

Após um período de poucos avanços em 1989 temos uma retomada do desenvolvimentos dos tubos de raios X e detectores com a introdução da *tomografia helicoidal ou espiral*. A TC helicoidal aumentou a abrangência da TC permitindo varrer um órgão inteiro enquanto o paciente prende a respiração. A técnica possibilita a reconstrução tridimensional de órgãos inteiros.

O avanço mais recente nessa área é a *TC multi-cortes (multi-slice computed tomography - MSCT)*. Equipamentos de 4 cortes foram lançados em 1998, já chegavam a 64 cortes em 2004 e em 2007 foi lançado o primeiro equipamento de TC 4D (quatro dimensões), com 320 cortes e capaz de varrer 16 centímetros do paciente com uma única rotação em apenas 0,35 segundos.

A principal diferença dos aparelhos de corte único é a matriz de detectores bidimensional que permite a aquisição volumétrica de imagens do paciente. O conjunto feixe de raios X em forma de cone, matriz bidimensional de detectores, o sistema de movimentação da mesa e do paciente e o processo similar a TC helicoidal permitem adquirir as imagens em tempo curto o

suficiente para gerar imagens de órgãos de movimento rápido como o coração.

Obviamente o processo de obtenção dos dados têm influência direta nos conceitos físicos aplicados na obtenção bem como nos conceitos matemáticos, estatísticos e estratégias computacionais aplicados no algoritmo de reconstrução das imagens.

### 1.3 Aplicações em outras áreas

As aplicações das diferentes técnicas até agora mencionadas não ficam restritas somente à área médica.

A tomografia tem sido utilizada em pesquisas de recursos do solo [24, PIRES, 2006], aplicações em agricultura no diagnóstico de pragas no interior de plantas, identificação de desgastes, falhas, fissuras internas de peças na área mecânica entre outras aplicações. Uma aplicação inte-

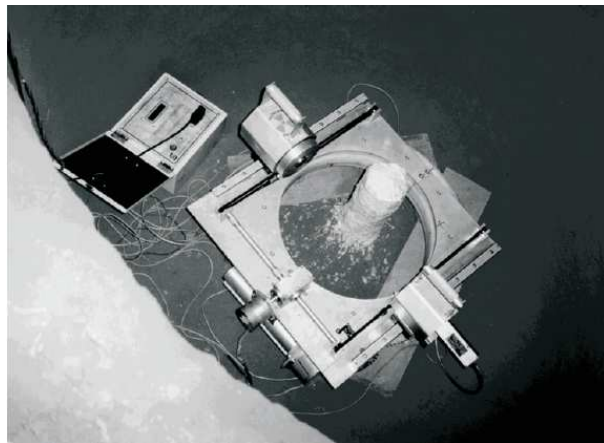


Figura 1.15: Estudo de solos colapsíveis

ressante da tomografia em agricultura é nos estudos referentes a compactação de solo causadas pelo maquinário após o plantio e como essa compactação influencia o desenvolvimento da cultura implantada. Uma técnica já consagrada devido sua eficiência quanto a conservação do solo



Figura 1.16: Utilização de maquinário no plantio.

e da umidade é o plantio direto em palha que podemos observar na Figura 1.17. Após a cultura de um cereal, por exemplo a aveia, planta-se milho sem preparar a terra. A tomografia é usada



Figura 1.17: Plantio direto em palha

para se obter imagens internas de partes do solo que envolvem uma semente. As imagens permitem avaliar a umidade e a compactação do solo e também acompanhar o desenvolvimento da semente. As imagens podem ser feitas em laboratório onde se utilizam emissão de raios X, Figura 1.15, ou em campo onde as medições são feitas com radiação gama proveniente de um material radioativo, Figura 1.18. Os resultados permitem avaliar qual o tipo de maquinário



Figura 1.18: Tomógrafo

causa menos compactação de solo e qual a influência na germinação das sementes.

Observando a Figura 1.15 ou a Figura 1.18 o aparelho utilizado para a obtenção dos dados é um tomógrafo cuja geometria é de um aparelho de 1ª geração.

Além dos estudos de compactação de solo temos a tomografia vem sendo aplicada no estudo de solos colapsíveis, ou seja, a grosso modo qual é a capacidade de “peso” ou pressão que um determinado solo pode suportar. Esse estudo é fundamental para verificar se determinado solo, em áreas agrícolas, suporta a construção de barracões ou silos.

## 2 Conceitos Matemáticos e Físicos

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados, tanto físicos quanto matemáticos que usaremos neste trabalho. Na parte Matemática apresentamos conceitos de Álgebra Linear, Análise e Otimização, enquanto que na parte Física veremos os conceitos relativos as interações entre a radiação e os objetos em estudo.

### 2.1 Bases Matemáticas

Essa seção apresenta as estruturas algébricas, definições e resultados que usaremos na modelagem do problema e na discussão da convergência dos algoritmos de reconstrução de imagens tomográficas.

#### 2.1.1 Sistemas Lineares

Uma ferramenta muito importante, que utilizaremos bastante, é a **equação linear** de  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que é escrita da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são constantes reais.

As equações lineares são classicamente utilizadas para modelar problemas reais. As constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são conhecidas como parâmetros e representam as informações obtidas do problema real enquanto que a constante  $b$  normalmente é uma contribuição ou soma de contribuições dos dados medidos no problema.

Um conjunto com  $m$  equações nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é chamado de **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** e é escrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$



onde  $a_{ij}$  e  $b_k$  são constantes reais, para  $i, k = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ . Em notação matricial o sistema linear definido acima pode ser escrito como:

$$Ax = b.$$

Considerando o sistema linear com  $m$  linhas e  $n$  colunas vamos classificá-lo como **sobre-determinado** se  $m > n$ . Neste trabalho nosso interesse está nos sistemas sobredeterminados pelas características do modelo utilizado, portanto não trataremos os sistemas onde  $m \leq n$ .

## 2.1.2 Matrizes

Admitiremos um conhecimento básico sobre matrizes e apresentaremos somente os conceitos mais relevantes para esse trabalho. Cabe ao leitor fazer uma consulta mais detalhada na bibliografia, como por exemplo em [1, ANTON, 2001].

Dada uma matriz  $A_{m \times n}$ , sua imagem sobre  $\mathbb{R}^m$  é o conjunto denotado por:

$$I(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}$$

e o seu núcleo é:

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Se a matriz  $A$  é quadrada de ordem  $n$  e seu determinante é não nulo, então ela admite uma matriz inversa denotada por  $A^{-1}$  que satisfaz  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ . ( $I$  é a matriz identidade).

Para a mesma matriz  $A$  e considerando  $0$  como sendo o vetor nulo temos as seguintes equivalências:

- $A$  é invertível;
- $Ax = 0$  tem apenas a solução trivial  $x = 0$ ;
- $A$  é equivalente por linhas a  $I$ .

## 2.1.3 Produto interno e ortogonalidade

Uma estrutura algébrica muito importante é a estrutura de espaço vetorial. Se  $V$  é um espaço vetorial então um **produto interno** sobre  $V$  é uma função que a cada par ordenado de vetores  $u, v \in V$  associa o número real denotado por  $u^T v$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- $(u + v)^T w = u^T w + v^T w, \forall u, v, w \in V$ ;
- $(\alpha u)^T v = \alpha(u^T v), \forall u, v \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $u^T v = v^T u, \forall u, v \in V$ ;
- $u^T u \geq 0, \forall u \in V$  e  $u^T u = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Sobre um espaço  $V$  com produto interno, definimos a norma de cada  $u \in V$  como o número  $\|u\| = \sqrt{u^T u}$ .

Em espaços com produto interno podemos definir o conceito de ângulo entre dois vetores  $u$  e  $v$  através da relação:

$$\cos \alpha = \frac{u^T v}{\|u\| \|v\|} \quad (2.1)$$

Podemos observar na Figura 2.1(a) o significado geométrico do ângulo  $\alpha$  formado por dois vetores. Um caso especial ocorre quando o produto interno entre dois vetores  $u, v$  de um espaço vetorial  $V$  é nulo, ou seja,  $u^T v = 0$ . Neste caso dizemos que os vetores  $u$  e  $v$  são ortogonais sendo denotados por  $u \perp v$ . Na Figura 2.1(b) representamos o significado geométrico de ortogonalidade.

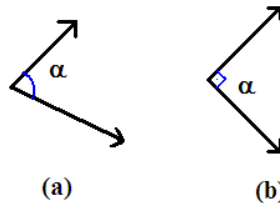


Figura 2.1: Ângulo entre dois vetores.

Dois subespaços  $U$  e  $V$  são ditos ortogonais quando  $u^T v = 0$ , para todo  $u \in U$  e  $v \in V$ . Seja  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  um conjunto de vetores não nulos e ortogonais de  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,  $v_i^T v_j = 0$  para todos  $i \neq j$ , com  $i = 1, \dots, k$ . Temos os seguintes resultados

1. O conjunto  $B$  é linearmente independente;
2. Se  $v = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ , então  $a_i = \frac{v^T v_i}{\|v_i\|^2}$ .

Se  $\|v_i\| = 1$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , dizemos que  $B$  é um conjunto ortonormal.

Muitas são as maneiras de resolver um sistema linear ou encontrar uma solução aproximada para o mesmo. Neste trabalho usaremos o conceito de projeção ortogonal para tal tarefa. A

projeção ortogonal de um vetor  $v$  sobre um vetor não nulo  $w$  é dada por

$$\text{proj}_w v = \left( \frac{v^T w}{\|w\|^2} \right) w.$$

Note que a projeção ortogonal de um vetor  $v$  sobre um vetor não nulo  $w$  é um múltiplo escalar do vetor  $w$ . A Figura 2.2 ilustra este conceito.

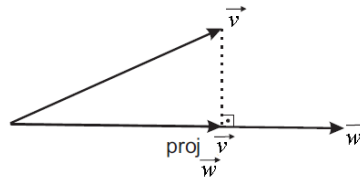


Figura 2.2: Projeção ortogonal entre dois vetores.

Além disso, se  $w \in \mathbb{R}^n$  é um vetor não nulo, então  $v - \text{proj}_w v$  é ortogonal a  $w$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^n$ . Basta verificar que o produto interno de  $w$  com  $v - \text{proj}_w v$  é nulo:

$$(v - \text{proj}_w v)^T w = v^T w - \left( \frac{v^T w}{\|w\|^2} \right) w^T w = 0.$$

Considerando  $S$  como um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$ , definimos o conceito de **complemento ortogonal de  $S$** , denotado por  $S^\perp$ , como o conjunto de todos os vetores de  $\mathbb{R}^n$  que são ortogonais a todos os vetores de  $S$ , ou seja,

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0, \forall y \in S\}.$$

Mesmo que  $S$  não seja um subespaço vetorial,  $S^\perp$  é um subespaço [1, ANTON, 2001].

Considerando novamente a matriz  $A_{m \times n}$  valem as seguintes igualdades:

- $N(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$ ;
- $N(A^T) = \text{Im}(A)^\perp$ .

Outro conceito importante que descreveremos é o de **Soma direta**. Considerando os espaços vetoriais  $U, V \subset W$  dizemos que  $W$  é soma direta de  $U$  e  $V$  quando todo elemento  $w \in W$  pode ser escrito como

$$w = u + v,$$

onde  $u \in U, v \in V$  e  $U \cap V = \{0\}$ . Se  $W$  é soma direta de  $U$  e  $V$  então,  $w \in W$  é escrito de forma única como  $w = u + v$ , com  $u \in U$  e  $v \in V$ . Usamos o símbolo “ $\oplus$ ” para denotar a soma direta, assim  $W = U \oplus V$ . Por exemplo, se  $S$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$ .

## 2.1.4 Problema dos Mínimos Quadráticos

Encontrar uma solução para o sistema linear

$$Ax = b \quad (2.2)$$

pode não ser uma tarefa fácil dependendo da quantidade de variáveis que esse sistema apresenta e também das equações lineares que o compõe. Além disso tal sistema nem sempre apresenta uma solução exata. Temos assim dois casos.

Primeiro, se  $b$  está na imagem de  $A$  então  $Ax = b$  tem uma única solução ou um número infinito de soluções. Podemos calcular a solução que tem a menor norma, ou seja, a solução de norma mínima que é única e sempre existe.

Segundo, se  $b$  não está na imagem de  $A$  então  $Ax = b$  não tem nenhuma solução. De todos os vetores  $x$  que minimizam  $\|Ax - b\|$  podemos calcular o que tem a menor norma, ou seja, a solução de norma mínima que sempre existe e é única.

Ambos os casos descritos parecem fazer parte de um problema mais abrangente. Considerando  $Ax = b$  (sem impor nenhuma condição sobre  $b$ ), vamos calcular um  $x$  que minimiza simultaneamente  $\|Ax - b\|$  e  $\|x\|$ . Este  $x$  sempre existe, é único e é linearmente relacionado com  $b$ . Escrevemos:

$$x = A^+b, \quad (2.3)$$

onde  $A^+$  denota um operador linear chamado de *pseudo inversa* de  $A$  ou pseudo inversa ortogonal de  $A$ . (Se existir  $A^{-1}$ , então  $A^+ = A^{-1}$  e  $x = A^{-1}b$ ).

O elemento  $x$ , definido em 2.3 é chamado de solução mínimos quadráticos do sistema 2.2.

No primeiro caso  $x = A^+b$  além de ser uma solução de  $Ax = b$  é a solução de menor comprimento (norma mínima). Entretanto no segundo caso  $x = A^+b$  minimiza simultaneamente  $\|Ax - b\|$  e  $\|x\|$ , mas não satisfaz  $Ax = b$ , ou seja, não existe solução exata para o problema quando  $b \notin \text{Im}(A)$ .

Muitos problemas práticos resultam em um sistema de equações  $Ax = b$  sobredeterminado e incompatível (ie.  $b \notin \text{Im}(A)$ ), como por exemplo o problema de reconstruir a imagem da seção transversal que modelaremos no próximo capítulo. Neste caso a solução exata nem sempre existe mas, podemos calcular um  $x$  que minimiza o erro  $\|Ax - b\|$ .

Se  $\hat{x}$  é uma solução de mínimos quadráticos para o sistema  $Ax = b$  e  $p = A\hat{x}$ , então  $p$  é o vetor no espaço coluna de  $A$  mais próximo de  $b$ . Os seguintes resultados garantem não só a existência do vetor mais próximo  $p$ , como sua unicidade e também fornecem uma caracterização desse

vetor mais próximo.

Seja  $S$  um subespaço de  $\mathbb{R}^m$ . Para cada  $b \in \mathbb{R}^m$  existe um único elemento  $p$  de  $S$  que está o mais próximo possível de  $b$ , isto é,

$$\|b - y\| > \|b - p\|$$

para todo  $y \neq p$  em  $S$ . Além disso, um determinado vetor  $p$  em  $S$  está o mais próximo possível de um dado vetor  $b \in \mathbb{R}^m$  se e somente se  $b - p \in S^\perp$ . Veja ilustração na Figura 2.3. Aplicando

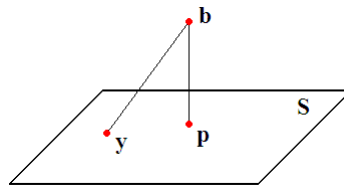


Figura 2.3: Problema dos mínimos quadrados.

isso para  $S = I(A)$ , obtemos

$$(A\hat{x} - b) \perp I(A) \Rightarrow A\hat{x} - b \in N(A^T) \Rightarrow A^T(A\hat{x} - b) = 0.$$

O que motiva o seguinte resultado. Seja  $A_{m \times n}$  de posto  $n$ , então as equações normais

$$A^T A x = A^T b$$

tem uma única solução

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

e  $\hat{x}$  é a única solução de mínimos quadráticos para o sistema  $Ax = b$ .

Note primeiramente que  $A^T A$  é invertível. Para verificar isso, tome um  $z$  que é uma solução de

$$A^T A z = 0. \tag{2.4}$$

Então,  $Az \in N(A^T)$ . Por outro lado  $Az \in I(A) = N(A^T)^\perp$ , logo  $Az \in N(A^T)^\perp$ . Como  $N(A^T) \cap N(A^T)^\perp = \{0\}$ , temos que  $Az = 0$ . Como  $A$  tem posto  $n$ , as colunas de  $A$  são linearmente independentes e, conseqüentemente,  $Ax = 0$  tem apenas a solução trivial. Logo,  $z = 0$  e (2.4) tem apenas a solução trivial. Portanto,  $A^T A$  é invertível. Temos, então, que  $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$  é a única solução para as equações normais e, portanto, a única solução de mínimos quadráticos para o sistema  $Ax = b$ .

### 2.1.5 Sequências e Limites de Sequências

Uma sequência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto dos números naturais  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. O valor  $x(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , será representado por  $x_n$  e chamado o termo de ordem  $n$ , ou  $n$ -ésimo termo da sequência. Escreveremos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , ou simplesmente  $(x_n)$ , para indicar a sequência.

Exemplos:

$$(x_n) = (2n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow (2, 4, 6, 8, \dots)$$

$$(x_n) = (x_{n-1} + 3)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow (2, 5, 8, 11, \dots)$$

Dizemos que a sequência  $(x_n)$  de números reais converge para o número real  $a$  ou que a sequência  $(x_n)$  tem limite  $a$ , e escreve-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ou  $x_n \rightarrow a$ , quando para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ , sempre que  $n > n_0$ . Em linguagem simbólica

$$x_n \rightarrow a \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Classificamos uma sequência  $(x_n)$  como limitada se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x_n| \leq c$$

Um exemplo de sequência limitada é  $(x_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  a qual assume valores entre 0 e 1.

Uma sequência  $(x_n)$  diz-se crescente se temos  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < x_{n+1}$  e diz-se decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > x_{n+1}$ . Uma sequência diz-se monótona se ela for não crescente ou não decrescente, ou seja,  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$  ou  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$  respectivamente.

Através desses conceitos básicos obtemos os seguintes resultados para sequências:

- toda sequência monótona e limitada é convergente;
- toda sequência limitada e com um único ponto de acumulação é convergente.

## 2.2 Conceitos Físicos

A interação entre a radiação e o objeto que pretendemos reconstruir a imagem nos fornece as medidas das atenuações utilizadas para reconstruir imagens tomográficas. Para modelar o

problema da reconstrução da imagem da seção transversal de um certo objeto é fundamental o conhecimento desses fenômenos físicos [13, HERMAN, 1980] e é justamente o modo como os dados são adquiridos que determinam o melhor algoritmo e permitem estimar possíveis erros de medição.

### 2.2.1 Ondas

Uma onda é a propagação de energia em um meio material ou no vácuo caracterizada por sua frequência  $f$  e seu comprimento de onda  $\lambda$ , sendo essas duas grandezas inversamente proporcionais e relacionados pela fórmula

$$v = \lambda f, \quad (2.5)$$

onde  $v$  é a velocidade de propagação da energia no meio. A energia  $E$  de uma onda é diretamente proporcional à sua frequência relacionada por  $E = hf$ , onde  $h$  é uma constante física conhecida como constante de Planck.

As ondas são classificadas em dois grupos, o das ondas mecânicas que necessitam de um meio material para se propagar, como por exemplo o som que escutamos e os ultra-sons usados nos exames de ecografia, e o grupo das ondas eletromagnéticas constituídas por campos elétricos e campos magnéticos, variáveis e oscilando em planos perpendiculares entre si. As ondas eletromagnéticas são capazes de propagarem-se no espaço e dependendo de sua frequência e da densidade de certos materiais, podem atravessá-los, isso quer dizer que também podem propagar-se através de certos materiais. No vácuo, sua velocidade de propagação é de 300.000 km/s. São da mesma natureza que a luz visível. Alguns exemplos são as ondas de transmissão de rádio e televisão e as radiações nucleares.

A *Radiação* é uma forma de energia, emitida por uma fonte, e se propaga de um ponto a outro sob a forma de partículas com ou sem carga elétrica (partículas alfa e beta) ou ainda sob a forma de ondas eletromagnéticas (raios X e raios- $\gamma$ ). Como o comprimento de onda é muito pequeno, estas ondas tem a capacidade de atravessar alguns tipos de materiais dentre eles o corpo humano. Cada material é atravessado por diferentes quantidades de raios X devido as diferentes densidades dos materiais. Esse princípio é utilizado em várias técnicas de obtenção de imagens internas. Mais detalhes sobre energia nuclear e radiações em [21, NAJERA, 2006].

Considera-se *radiação ionizante* qualquer partícula ou radiação eletromagnética que, ao interagir com a matéria, “arranca” elétrons dos átomos ou de moléculas, transformando-os em íons, direta ou indiretamente. Assim, as partículas alfa, as partículas beta e raios- $\gamma$ , emitidas

por fontes radioativas, bem como os raios X, emitidos pelos respectivos aparelhos, são radiações ionizantes.

### 2.2.2 Produção de raios X e radiações

Os raios X [20, MASCHIO, 1997] são radiações da mesma natureza que os raios- $\gamma$ , ou seja, ondas eletromagnéticas com características idênticas. A diferença está na origem, ou seja, os raios X não saem do núcleo do átomo, eles são produzidos pelo choque de elétrons acelerados contra um anteparo metálico. Portanto os raios X não são energia nuclear, eles são energia atômica (energia de partículas).

A maioria dos materiais emite radiações naturalmente só que em quantidades muito pequenas. Na natureza encontramos alguns materiais radioativos como, por exemplo, o Urânio e o Rádio. Entretanto, para se obter material radioativo em grande escala é feito um processo de “enriquecimento” [21, NAJERA, 2006], obtendo assim material suficiente para uso médico, nas usinas nucleares e outras utilizações industriais.

A produção de raios X é feita liberando-se elétrons de uma fonte e acelerando-os contra um alvo metálico dentro de uma estrutura conhecida como tubos de raios X que dividem-se em dois grupos quanto a obtenção dos elétrons: tubos de gás, que produzem elétrons por ionização e tubos de filamentos que utilizam um filamento aquecido como fonte de elétrons.

No tubo de filamento se retira quase todo o ar para evitar o choque dos elétrons com o ar provocando calor excessivo e também possíveis desvios do feixe de elétrons. São colocados dois eletrodos, um negativo, (o cátodo) e outro positivo (o ânodo). Os elétrons liberados do cátodo aquecido são atraídos para o ânodo que está com uma diferença de potencial de algumas dezenas de quilovolts, mais positivo. Antes porém, de chegarem ao ânodo esses elétrons acelerados chocam-se com um anteparo metálico. Ao interagirem com os átomos do alvo os elétrons perdem parte de sua energia cinética em fenômenos de dissipação térmica e a energia restante produzirá os raios X através de dois processos distintos: radiação característica e radiação de freiamento, também conhecida como radiação de *bremsstrahlung*.

A radiação característica ocorre quando o elétron do feixe incidente choca-se com um elétron da camada interna de um átomo do alvo e arranca esse elétron do átomo causando um desequilíbrio. Para o átomo que está ionizado retornar ao equilíbrio um dos elétrons da camada externa migra para a camada interna liberando energia sob a forma de raios X. Esta energia corresponde a diferença entre a energia de ligação entre a camada externa que o elétron ocupava e a mais interna que passou a ocupar. Como cada elemento tem uma energia de ligação



particular essa radiação denomina-se característica.

A radiação de freiamento ou *bremsstrahlung* é produzida quando um elétron do feixe tem sua trajetória modificada, por uma colisão com o núcleo do átomo do alvo, acompanhado de uma desaceleração o que faz com que parte da energia cinética seja emitida como fóton de raios X. Quanto maior o ângulo de espalhamento maior será a energia do fóton, assim não existe uma faixa de energia característica, mas um espectro contínuo que depende do ângulo de desvio.

Cada diferença de potencial (ddp) imprimida entre os eletrodos do tubo de raios X terá um espectro diferente e de comprimento de onda mínimo bem definido que só depende da ddp imprimida entre os eletrodos. Essa máxima energia ocorre quando toda a energia cinética é transformada em fóton de raios X em uma única colisão com um núcleo de átomo sendo totalmente freado nessa colisão. O fenômeno de *bremsstrahlung* é o mais comum na produção de raios X e a faixa de energias utilizada está entre 20 a 150keV.

### 2.2.3 Interação das radiações com a matéria

Ao atravessar a matéria, fótons de alta energia (raios X) transferem energia através de interações com átomos, núcleos e elétrons. Os mecanismos de interação mais presentes nos procedimentos radiológicos são as colisões elásticas e inelásticas e por absorção fotoelétrica descritos abaixo.

**Efeito Compton:** é o espalhamento sofrido por um fóton após interagir com um elétron orbital, ou seja, após a interação, um fóton com menor energia é emitido, em uma direção diferente da do fóton original.

**Produção de Pares:** é a interação de um fóton com um campo elétrico ou partícula carregada em que o mesmo desaparece dando origem a um par elétron-pósitron. A produção de pares só é possível para fótons com energia superior a 1.022MeV.

**Efeito Fotoelétrico:** nessa interação a energia do fóton é totalmente transferida para um átomo, normalmente a energia vai para um elétron de uma camada interna que adquire energia cinética.

Ao atravessar um meio material homogêneo, um feixe de fótons segue um princípio físico conhecido como “Lei de Beer Lambert” descrito na seguinte equação.

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu d} \quad (2.6)$$

onde  $I_0$  é o número de fótons na entrada,  $I$  é o número de fótons que atravessou a seção,  $d$  é o

comprimento da seção (a grosso modo o comprimento percorrido pelo feixe) e  $\mu$  é o coeficiente de absorção linear por centímetro. De 2.6 podemos escrever o coeficiente de atenuação linear como:

$$\mu = \frac{1}{d} \cdot \ln \frac{I_0}{I}.$$

O objetivo em um exame de tomografia é determinar a atenuação linear  $\mu(s)$  em cada ponto do objeto pertencente a correspondente seção que está se reconstruindo a imagem. Quando o objeto é não homogêneo com radiação monocromática a intensidade é dada por

$$I = I_0 \cdot e^{-\int_0^d \mu(s) ds} \text{ e assim } \ln \frac{I_0}{I} = \int_0^d \mu(s) ds.$$

A atenuação total de cada raio que atravessa o objeto depende do valor de  $\mu$  em cada ponto da sua trajetória e como a integral de  $\mu(s)$  pode ser calculada ao longo dessa trajetória, podemos dizer que a técnica de TC consiste em medir o maior número possível destas integrais. Radon em seu trabalho diz que é possível determinar com a precisão desejada a distribuição bidimensional de uma característica de um objeto se o conjunto dessas integrais for grande o suficiente. Em outras palavras, é possível reconstruir um corte bidimensional utilizando um número suficientemente grande dessas medições através de integrais de linha distribuídas sobre o corte.

O coeficiente de atenuação depende diretamente da energia dos fótons incidentes, sendo que as diferenças e variações na intensidade do feixe durante o escaneamento acarretam em medidas inconsistentes e defeitos nas imagens.

Na reconstrução de imagens tomográficas calculamos o coeficiente de atenuação linear  $\mu$  o qual depende muito da energia do feixe e não é possível comparar duas imagens obtidas com equipamentos que utilizam diferentes tensões no tubo de raios X, uma vez que a energia do feixe é diretamente proporcional a tensão produzida. Para resolver o problema definiu-se o *número de CT* tendo como base a atenuação da água e cuja unidade é Hounsfield (HU) em homenagem ao inventor da tomografia computadorizada. Um material  $M$  qualquer com coeficiente de atenuação linear  $\mu_M$  tem número de CT definido por:

$$\text{Número CT} = \frac{(\mu_M(E_{Ef}) - \mu_{\text{água}}(E_{Ef}))}{\mu_{\text{água}}(E_{Ef})} \cdot 1000[\text{HU}], \quad (2.7)$$

onde  $E_{Ef}$  é a energia efetiva do feixe,  $\mu_{\text{água}} \cong 0$  e  $\mu_{\text{ar}} \cong -1000$ . Na escala do número de CT o ar e água tem valores fixos  $-1000\text{HU}$  e  $0\text{HU}$  respectivamente independentemente da energia do feixe e de seu respectivo espectro. A seguinte tabela apresenta alguns valores de números de CT para alguns tecidos com  $E_{Ef} = 80\text{keV}$ .

Tecido	Número de CT
Ar	-1000
Pulmão	-900 a -400
Gordura	-110 a -65
Rim	30
Sangue normal	35 a 55
Sangue coagulado	80
Músculo	40 a 60
Fígado	50 a 85
Ossos	130 a 250

Tabela 2.1: Números de CT de alguns órgãos com  $E_{Ef} = 80keV$ .

### 3 O problema, o algoritmo e a convergência

O problema da reconstrução de imagens por projeções aparece em inúmeras situações de estudos científicos, nas áreas médicas e técnicas. Aplica-se desde a reconstrução de imagens microscópicas de bactérias, através de dados provenientes de microscópios eletrônicos até a reconstrução de imagens de estrelas utilizando dados coletados fora da atmosfera da Terra, por instrumentos instalados em foguetes espaciais.

Neste capítulo trataremos das aplicações de reconstrução de imagens na medicina diagnóstica especificamente em tomografia computadorizada, onde discretizaremos o problema da reconstrução da seção transversal e apresentamos algoritmos para resolvê-lo. Também vamos estudar a convergência e os erros dos respectivos algoritmos apresentados.

#### 3.1 Discretização do problema

Uma imagem digital [22, NETO, 2005] consiste de uma malha composta por pequenos elementos de imagem denominados pixels e, cada um deles possui uma cor associada. A Figura 3.1 mostra ampliações de uma imagem digital ilustrando a descrição acima.

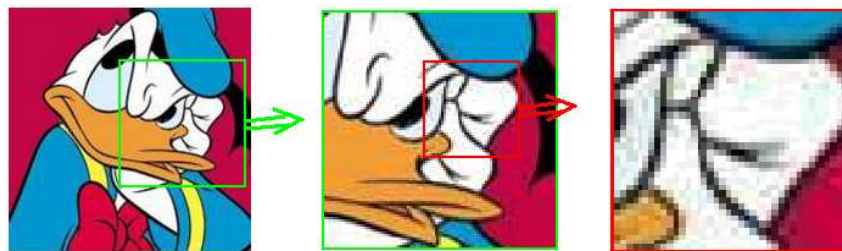


Figura 3.1: Nas ampliações da imagem digital podemos visualizar os pixels.

Para compreendermos o processo de reconstrução de imagens vamos tomar um exemplo teórico simples de reconstrução de uma imagem. A Figura 3.2 apresenta uma imagem quadrada somente nas cores preto e branco. Vamos dividi-la em uma malha de  $10 \times 10$  quadrados e medir a intensidade luminosa, representada por  $\omega$ , em cada quadrado da seguinte maneira:  $\omega = 0$  se a área correspondente ao quadrado for totalmente coberta pela cor preta,  $\omega = 255$  se a área correspondente ao quadrado for totalmente coberta pela cor branca e um valor intermediário proporcional a área coberta pela cor branca. Por exemplo, se 10% da área do

quadrado for branco então  $\omega = 26$ , se 50% da área do quadrado for branco então  $\omega = 128$ . Em programação, uma maneira de definir cores na tela do computador é através da função

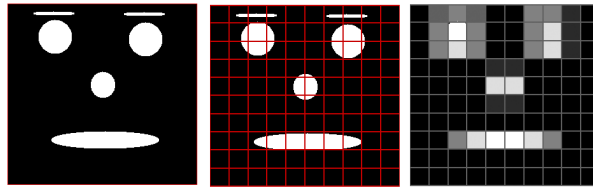


Figura 3.2: Exemplo

$RGB(r, g, b)$ , “RGB” iniciais das palavras, em inglês: “Red, Green e Blue,” vermelho, verde e azul. Cada um dos parâmetros  $r$ ,  $g$  e  $b$  aceita valores entre 0 e 255, assim a cor branca é representada por  $RGB(255, 255, 255)$ , a cor preta por  $RGB(0, 0, 0)$ , uma tonalidade de verde por  $RGB(0, 200, 0)$  e as tonalidades de cinza por valores iguais em ambos os parâmetros, por exemplo,  $RGB(100, 100, 100)$  e  $RGB(204, 204, 204)$  representam tonalidades de cinza.

Voltando ao exemplo da reconstrução, medimos a intensidade luminosa da imagem em cada um dos quadrados da malha e representamos essa intensidades em tonalidades de cinza na Figura 3.2, obtemos uma reconstrução da imagem inicial. Dividindo a imagem inicial em uma malha de  $30 \times 30$  e repetindo o mesmo processo temos como resultando a imagem da Figura 3.3 a qual se aproxima mais da imagem inicial. Em resumo quanto maior a resolução melhor é a qualidade da imagem e uma maior riqueza de detalhes pode ser observada.

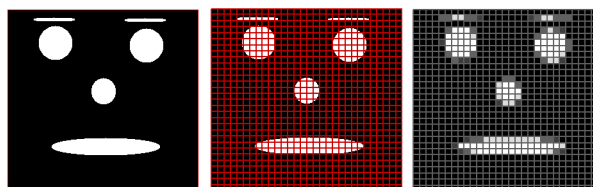


Figura 3.3: Exemplo

Para que a reconstrução de uma imagem do corpo humano seja usada para fins diagnósticos necessitamos que ela nos permita diferenciar as diferentes estruturas e torne possível visualizar anormalidades. Os primeiros aparelhos de tomografia reconstruíam imagens com resolução  $80 \times 80$  pixels, gerações posteriores eram capazes de produzir imagens com resolução  $256 \times 256$  pixels. Atualmente a resolução mais usada para as diferentes seções do corpo é de  $512 \times 512$  pixels, mas aparelhos mais precisos são capazes de produzir imagens com resolução ainda maior.

Não conseguimos construir a imagem da seção transversal diretamente como no exemplo dado anteriormente, pois o objeto cuja imagem queremos está no interior do corpo e não

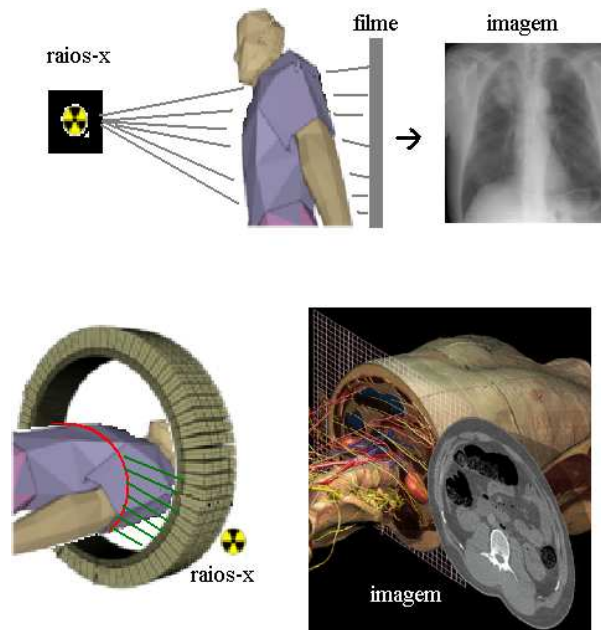


Figura 3.4: O problema a ser resolvido.

conseguimos determinar a tonalidade de cinza diretamente. Uma radiografia nos fornece uma imagem que representa a projeção, sobre um filme, dos tecidos e órgãos, da região de onde se deseja obter a imagem. Já a tomografia tem como objetivo conseguir imagens das seções internas do corpo, conforme esquematizado na Figura 3.4.

Enquanto na radiografia utilizamos um feixe de raios X, em projeção cilíndrica, que abrange toda a imagem, na tomografia, para gerar cada uma das imagens da seção transversal individualmente, utilizamos vários feixes de fótons provenientes de uma fonte de raios X ou raios gama emitidos por algum material radioativo, também em projeção cilíndrica, mas com um diâmetro de no máximo o diâmetro do pixel. Na tomografia são feitas várias emissões seguidas de medições ao redor de cada seção que se deseja a imagem, já na radiografia se faz apenas uma emissão que é diretamente representada no filme radiográfico sem nenhum dado ser medido.

Para modelar o problema matemático da reconstrução da imagem serão feitas várias aproximações dos conceitos físicos envolvidos. Os raios são desviados de sua trajetória por fenômenos de difração e apesar dos raios serem feixes cônicos eles serão tomados como se fossem retas. A atenuação é dada em função do comprimento de onda a qual apresenta sempre diferentes comprimentos de onda, ou seja, apesar de supormos um feixe monocromático (mesmo comprimento de onda) na prática isso não é possível. Grandes variações nos dados resultam em imagens de qualidade inferior, assim necessitamos minimizar ou corrigir os erros nas medições obtidas. Entretanto, o modelo matemático, na sua essência, para o problema é o mesmo e não depende dessas correções.

Na modelagem do problema vamos utilizar a geometria de um tomógrafo de 1ª geração na coleta os dados como podemos observar na Figura 3.5 a coleta de dados ao redor de uma seção transversal. O modelo não é alterado se os dados forem obtidos por tomógrafos de outras gerações, apenas achamos a geometria de um tomógrafo de 1ª geração mais intuitiva para o processo de modelagem. Com o auxílio de um computador e do conjunto de informações adquiridas de cada seção devemos reconstruir individualmente cada uma das imagens das seções transversais desejadas.

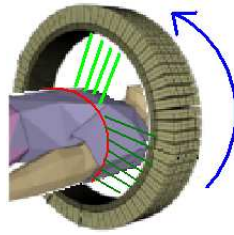


Figura 3.5: Coleta de dados.

A imagem que será reconstruída é de uma fatia, com espessura, da amostra que se está fazendo a tomografia, pois seria impossível medir as atenuações em um corte adimensional. Iniciaremos a modelagem da reconstrução da imagem da seção transversal dividindo a seção da qual queremos a imagem em uma malha em  $N$  quadrados numerados, 1, 2, ...,  $N$ , conforme exemplificado na Figura 3.5. Cada uma das divisões da malha representa um pixel (elemento de imagem) na imagem a ser gerada e apesar da imagem ser plana na prática se trata de uma fatia que apresenta volume e cada pixel que será representado na imagem, como podemos observar na Figura 3.6, é um pequeno cubo da amostra em estudo e recebe o nome de *voxel*.

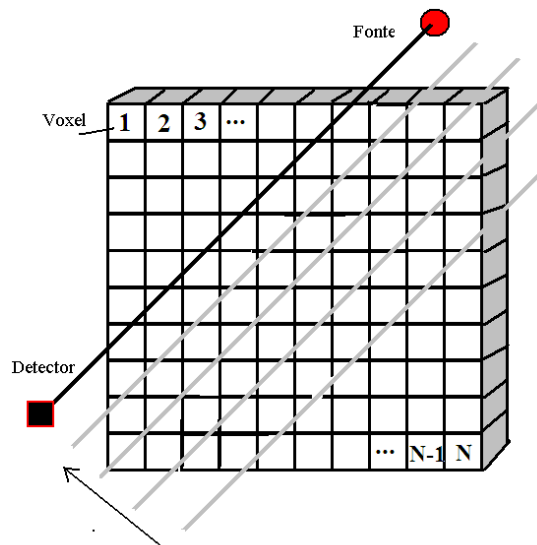


Figura 3.6: Representação da seção transversal

Quando o feixe de fótons atravessa o objeto medimos sua intensidade no ponto de entrada e no ponto onde deixa o objeto e assim obtemos uma estimativa total do coeficiente de atenuação do feixe dentro do objeto, conforme representado na Figura 3.7. Suporemos ainda que a função que mede a atenuação linear será constante em cada pixel mesmo que a região correspondente a esse pixel seja composta por materiais diferentes. Suporemos também que o feixe de fótons seja monocromático e portanto ao incidir sobre um meio material ele obedece a “Lei de Beer Lambert,” que apresentamos na Seção 2.2.3.

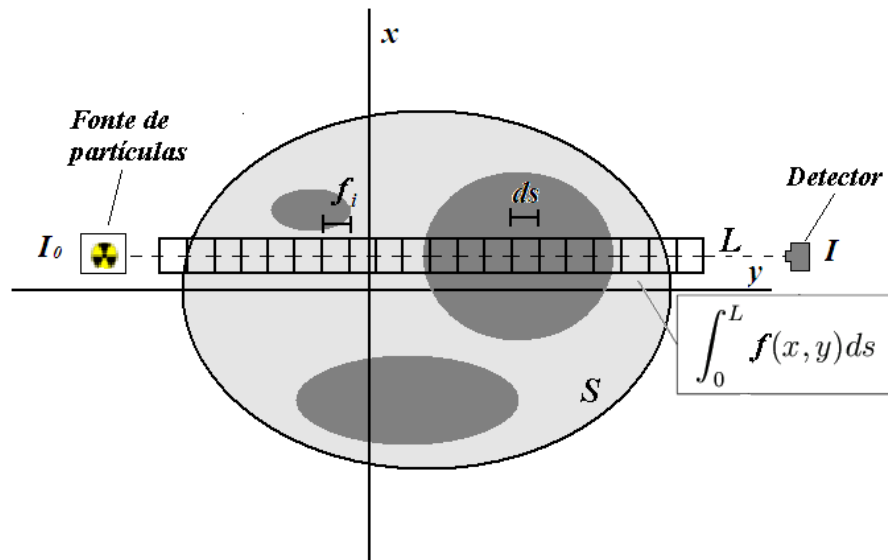


Figura 3.7: Interação entre os fótons e o objeto.

De um modo mais abstrato, consideramos a seção limitada  $S \subset \mathbb{R}^2$  a ser reconstruída sobre a qual está definida uma função  $f(x,y)$  que representa o coeficiente de atenuação linear do pixel de centro  $(x,y)$ . Como materiais diferentes apresentam diferentes coeficientes de atenuação determinar o valor de  $f$  sobre a região  $S$  significa obter a imagem da seção plana. Entretanto o valor de  $f$  não pode ser estimado diretamente no interior do objeto que se deseja a imagem, pois para tanto seria necessário cortar ou perfurar o objeto em estudo o que contraria a idéia de um processo não invasivo. Mas, podemos medir o valor da atenuação total  $\mu(L)$  ao longo de uma trajetória  $L$  descrita pela passagem de um feixe de partículas por  $S$  e medida por um detector de partículas como:

$$\mu(L) = \int_L f(s) ds.$$

No plano a atenuação total segue a Lei de Beer Lambert:

$$\int_0^L \mu(x,y) ds = \ln \frac{I_0}{I}.$$

Após passar pelos voxels cada feixe é medido e se obtém a medida  $\mu_{Li}$  da atenuação total sofrida



pelo feixe a qual denotaremos pelo número real  $b_i$ . Essa atenuação é tabelada pelo Número de CT do material para uma determinada energia do feixe e  $|b_i| \leq 1000$ .

Para modelar esse problema vamos tomar uma malha de dimensões  $n \times n$  com um total de incógnitas  $N = n^2$ . Considere uma fileira de voxels que são atravessados por um feixe de raios X, conforme ilustrado na Figura 3.8.

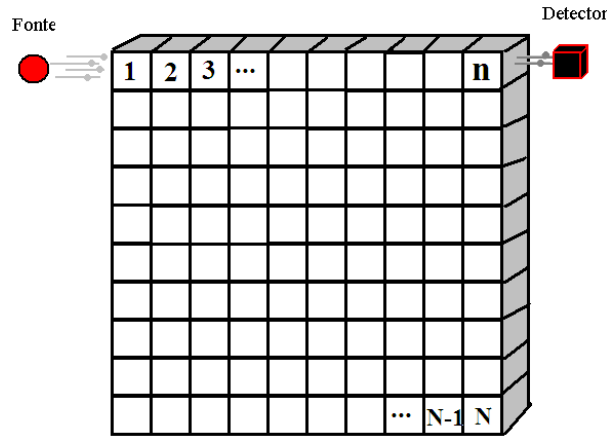


Figura 3.8: Varredura de uma linha.

Queremos descobrir a atenuação causada por cada voxel, ou seja todos os valores de  $f(x,y)$  que correspondem a atenuação causada pelo voxel de centro  $(x,y)$ . Para facilitar vamos denotar as incógnitas que representam a atenuação  $f(x,y)$  causada por cada voxel pelo número real  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq N$ . As incógnitas  $x_j$  representam a solução para a atenuação de cada voxel e seu valor representará ainda a respectiva atenuação na seção plana. Novamente como cada voxel é pequeno e cada tecido do corpo humano é homogêneo vamos considerar válida a Lei de Beer Lambert para cada voxel, sendo o voxel tomado como um cubo homogêneo, mesmo que ele na prática seja composto por diferentes tecidos. Cada um dos feixes  $(L_1, \dots, L_M)$  sofrerá uma atenuação total  $\mu_{L_i}$  ao atravessar a seção e essa será denotada pelo número real  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , que aproxima a medida da soma de todas as atenuações dos voxels da fileira. Se os pixels atingidos pelo feixe  $L_i$  forem  $i_1, i_2, \dots, i_r$ , então a atenuação ao longo deste feixe pode ser escrito como:

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_j} + \dots + x_{i_r} = b_i. \quad (3.1)$$

Vamos realizar medições horizontais e verticais na seção da imagem conforme ilustrado na Figura 3.9, o que resulta no sistema de equações 3.2.

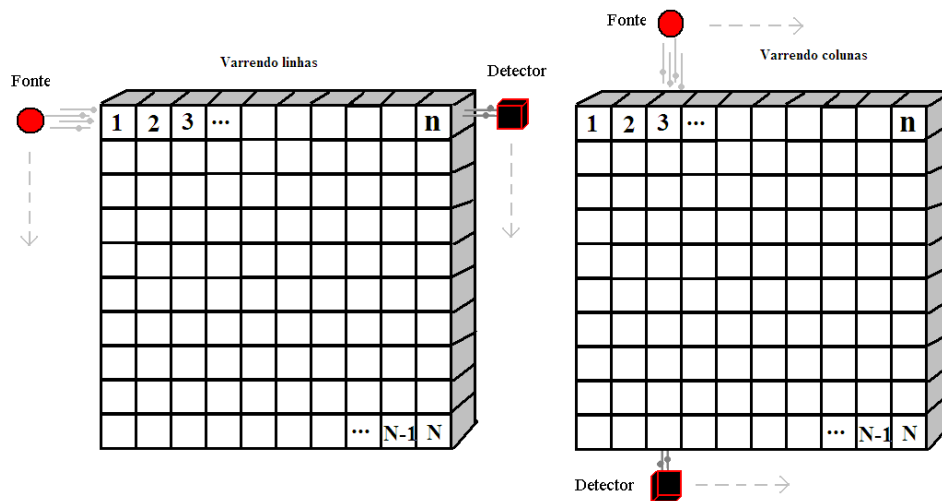


Figura 3.9: Varredura horizontal e vertical.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_n = b_1 \\ x_{n+1} + \dots + x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ x_{N-n+1} + \dots + x_N = b_n \\ x_1 + \dots + x_{N-n+1} = b_{n+1} \\ \vdots \\ x_n + \dots + x_N = b_{2n} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

O sistema de equações 3.2 não é suficiente para gerar uma imagem tomográfica, pois seu número de equações é  $2n$ , inferior ao número de incógnitas que é  $N = n^2$ . Necessitamos realizar mais medições variando os ângulos percorridos pelos feixes ao redor da seção que estamos gerando a imagem para obter outras equações.

Efetuada medições suficientes de modo que o número de equações seja maior que  $N^2$ , obtemos o sistema sobredeterminado 3.3 que modela o problema da reconstrução da imagem da sessão transversal. Como não sabemos por quais voxels passa o feixe consideramos todas as incógnitas ou voxels da imagem e acrescentamos o coeficiente  $a_{i,j}$  que assume valores 1 ou 0, conforme o feixe passe ou não pelo correspondente voxel. Neste sistema de equações,  $m$  representa o número total de feixes utilizados na medição.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mN}x_N = b_m \end{array} \right. \quad (3.3)$$

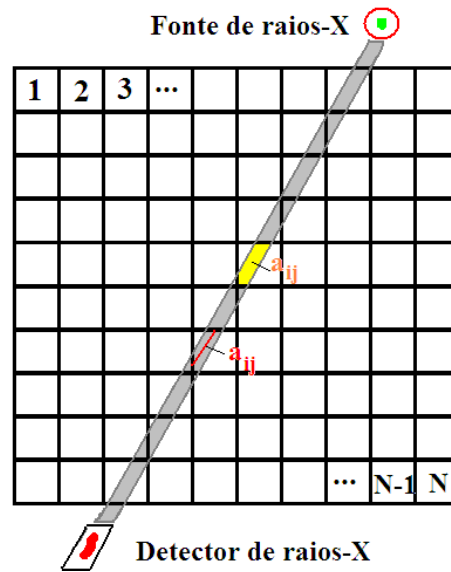


Figura 3.10: Discretização do problema

Uma pergunta natural que surge: por quais voxels passa um determinado feixe?

Podemos resolver isso considerando um coeficiente  $a_{ij}$ ,  $0 \leq a_{ij} \leq 1$  que a princípio tomamos como sendo nulo se o feixe não passa por aquele voxel ou 1 caso passe. Mas o feixe tem uma certa espessura e pode ser que ele passe por uma pequena fatia de um voxel e por quase todo outro conforme vemos na Figura 3.10, causando muita imprecisão. Temos medições mais precisas tomando  $a_{ij}$  como sendo o quociente entre comprimento do feixe que atravessa o voxel e o respectivo diâmetro do voxel. Como o feixe tem uma espessura teremos mais precisão considerando  $a_{ij}$  como o quociente entre a área do feixe que atravessa o voxel pela respectiva área total do voxel, Figura 3.10. Obviamente, nas duas últimas formas de se obter os coeficientes,  $a_{ij}$  é nulo se o feixe não passa pelo respectivo voxel.

Nessa abordagem a incógnita não é mais o valor da função  $f(x, y)$ , mas sim o vetor  $x = (x_1, \dots, x_N)$  e o problema da reconstrução da imagem consiste em utilizar as informações disponíveis no sistema acima para determinar o valor de cada  $x_j$ , que é o mesmo que determinar a atenuação causada por cada pixel. E deste modo decidir a tonalidade de cinza que cada pixel deve ser representado na imagem.

O sistema 3.3 pode ser reescrito como

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m), \quad (3.4)$$

e este pode ser escrito em notação matricial como

$$\mathcal{A}x = b, \quad (3.5)$$

onde  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times N}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ .

As medições das atenuações dependem de aproximações físicas da interação entre o feixe de fótons e as moléculas do objeto em estudo, ou mesmo perder energia ao longo de sua trajetória até atingir o detector por vários outros fatores que não dizem respeito a atenuação. Assim os dados para a reconstrução sempre contém um erro, mesmo que pequeno.

Uma maneira de deixar o modelo mais condizente com a realidade consiste em considerar as diferenças nas medidas das atenuações, o que nos leva ao seguinte sistema

$$b - \varepsilon \leq \mathcal{A}x \leq b + \varepsilon, \quad (3.6)$$

onde  $b$  é o vetor de todas as atenuações medidas e  $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de componentes positivas que representam as tolerâncias nas medições.

A desigualdade 3.6 pode ser escrita como

$$\vec{\mathcal{A}}x \leq \vec{b}, \quad (3.7)$$

onde  $\vec{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{2m \times N}$  e  $\vec{b} \in \mathbb{R}^{2m}$ . Para não carregar a notação vamos denotar o sistema 3.7 simplesmente por

$$Ax \leq b. \quad (3.8)$$

Devido à vários fatores como a geometria que deu origem a cada equação e o número de equações em relação ao de variáveis dentre outros quase sempre tornam o sistema 3.8 com múltiplas soluções.

Uma maneira de escolher uma solução, mesmo que aproximada é definir uma função  $h : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$  e buscar uma solução que a minimize frente as restrições impostas pelo sistema de desigualdades, ou seja,

$$\begin{aligned} & \min h(x) \\ \text{sujeito a } & Ax \leq b. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podemos usar

$$h(x) = \|x - x^0\|^2 \quad (x^0 \in \mathbb{R}^N), \quad (3.10)$$

ou

$$h(x) = \sum_{j=1}^N x_j \log x_j. \quad (3.11)$$

O uso da função descrita em 3.10 se deve ao fato que em tomografia médica é conhecida

a anatomia normal  $x^0$  que deve aparecer no exame e como a maioria dos pixels deve ser igual a um exame normal devemos ter  $x_j \approx x_j^0$  e assim é razoável para sua utilização na obtenção de uma solução compatível com 3.5. Já 3.11 nos fornece a solução de maior entropia que pode ser usada dependendo da situação. Mais detalhes sobre o uso dos funcionais podem ser vistos em [28, SBM].

## 3.2 Métodos iterativos

Problemas na forma 3.5 e 3.8 teriam uma solução clássica por eliminação gaussiana (escalonamento de  $A$ ) ou um algoritmo de Programação Linear como o método simplex [28, SBM]. Entretanto, as características da matriz  $A$  tornam a obtenção da solução mais difícil. Dentre as características da matriz  $A$  temos o alto número de coeficientes que ficam em torno de  $10^9$ . Devido a imagem ser um quadrado de  $n$  pixels de lado, cada equação terá no máximo  $2n$  coeficientes não nulos. Assim a densidade matriz  $A$  (proporção de coeficientes não nulos) é de ordem  $\frac{1}{n}$ .

Apesar dos sofisticados métodos de escolha de pivôs para superar essa baixa densidade de coeficientes não nulos esses métodos são impraticáveis para matrizes de dimensões maiores que  $1000 \times 1000$ . A saída para resolver esse tipo de problema é recorrer aos métodos iterativos que buscam uma solução aproximada para o problema. Ao invés da solução exata esses métodos iterativos geram uma sequência de elementos  $(x^k) \subset \mathbb{R}^N$  e  $(x^k) \rightarrow x^*$  que é a solução para os sistemas 3.5 ou 3.8.

Dentre alguns métodos iterativos para alcançar uma solução aproximada temos o Método de Gauss-Seidel e o Método de Jacobi. A convergência geométrica do método de Gauss-Seidel, por exemplo, ocorre por projeções paralelas aos eixos e em muitos casos dependendo da rotação dos hiperplanos o método pode cair em um ciclo e não convergir [28, SBM]. Métodos mais sofisticados como o de Kaczmarz e Cimmino, que descreveremos a seguir, utilizam projeções ortogonais sobre os hiperplanos e não enfrentam esse tipo de situação [28, SBM].

### 3.2.1 Os métodos de Kaczmarz e Cimmino

De modo geral dado um hiperplano  $H = \{y\}$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , um ponto de  $H$  mais próximo de  $x$  é  $\omega_H(x)$  dado por:

$$\omega_H(x) = x - \frac{(\langle \alpha, x \rangle - \beta)\alpha}{\|\alpha\|^2}. \quad (3.12)$$

Algoritmo de Kaczmarz para o sistema  $Ax = b$  com  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $A_i$  uma linha da matriz  $A$ :

Inicialize:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

Repita: Para cada  $x^k$ , defina  $z^{k+1,0} = x^k$  e calcule

$$z^{k+1,i} = z^{k+1,i-1} - \frac{(\langle A_i, z^{k+1,i-1} \rangle - b_i)A_i}{\|A_i\|^2} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (3.13)$$

$$x^{k+1} = z^{k+1,m}. \quad (3.14)$$

$x^{k+1}$  é a projeção ortogonal de  $x^k$  sobre o hiperplano  $H_t = \{w \mid \langle A_t, w \rangle = b_t\}$ , onde  $t = k + 1 \pmod m$ .

Algoritmo de Cimmino para o mesmo sistema  $Ax = b$  com os pesos:

$$\lambda_i > 0, \text{ com } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.15)$$

Inicialize:  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

Repita: Dado  $x^k$  calcule

$$x^{k+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left[ x^k - \frac{(\langle A_i, x^k \rangle - b_i)A_i}{\|A_i\|^2} \right] \quad (1 \leq i \leq m) \quad (3.16)$$

que pode ser escrito como:

$$x^{k+1} = x^k - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{(\langle A_i, x^k \rangle - b_i)A_i}{\|A_i\|^2} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (3.17)$$

Podemos classificar o Algoritmo de Cimmino como paralelo e o algoritmo de Kaczmarz como sequencial [28, SBM].

O caminho que seguimos na modelagem levou em conta o modelo discreto que resultou num sistema linear. Poderíamos ter tomado uma outra linha e feito uma modelagem que utiliza a transformada de Radon na solução do problema, entretanto não estamos interessados nesse estudo, pois o nosso objetivo são os métodos iterativos aplicados em sistemas de desigualdades.

Na próxima seção apresentaremos um algoritmo muito parecido com estes dois últimos métodos iterativos descrito em [13, HERMAN, 1980] e que trabalha sobre um sistema de de-

sigualdades.

### 3.3 O problema de reconstrução de imagem

Uma solução para o problema de reconstrução de imagem tomográfica é resolver o sistema linear de desigualdades dado em 3.8 ao invés do sistema linear de igualdades 3.5.

Cada desigualdade pode ser escrita do seguinte modo:

$$\langle a_i, x \rangle \leq b_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.18)$$

Assim o sistema linear de desigualdades descrito em 3.8 pode ser representado pelo seguinte conjunto de semi-espacos:

$$A_i = \{x \mid \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.19)$$

O conjunto solução do sistema é então dado por

$$R = \bigcap_{i=1}^m A_i. \quad (3.20)$$

O nosso objetivo é encontrar um elemento de  $R$ .

### 3.4 O método de relaxação e sua convergência

Para atingir um detalhamento que possibilite um diagnóstico médico preciso é necessário uma resolução de imagem acima de  $500 \times 500$  pixels, o que resulta numa imagem que contém mais de 250000 pixels e como cada pixel corresponde a uma variável  $x_i$ , o sistema tem o mesmo número de variáveis. Como o sistema é sobredeterminado o número de desigualdades  $p$  é um pouco maior que o número de variáveis. Poucos pixels são atravessados pelo feixe em cada medição o que torna o sistema de desigualdades muito esparso, normalmente menos de 1% dos coeficientes  $a_i$  são não nulos.

A localização e o valor dos coeficientes  $a_i$  podem ser facilmente calculados a partir da geometria dos raios X e dos pixels tendo em vista que a seção da a imagem está sendo reconstruída é fixa. Como o cálculo de um produto interno ou norma tem baixo custo computacional o seguinte algoritmo descrito em [13, HERMAN, 1980], produz uma sequência  $x^0, x^1, x^2, \dots$  de estimativas da solução do sistema 3.8 é computacionalmente razoável para reconstruirmos essa

imagem.

**Algoritmo 1** (*para desigualdades*)

inicialize

$$x^0 = x; \text{ (} x \text{ um ponto de } \mathbb{R}^N \text{)}$$

$$k = 0;$$

enquanto  $k \leq m$  faça

$$x^{k+1} = x^k + c^k a_i;$$

$$k = k + 1;$$

com

$$c^k = \begin{cases} 0 & \text{se } x^k \in A_i \text{ ou } \|a_i\| = 0 \\ r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $i = (k \bmod m) + 1$  (ou seja, a sequência de  $i$ 's é  $1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots$ ), e  $r^k$  é um parâmetro escalar de relaxamento.

Esse algoritmo é geralmente designado como TRA (técnicas de reconstrução algébricas) e a discussão sobre sua convergência pode ser feita através do seguinte teorema.

Note que, se o  $x_k \in R$  o algoritmo deixa de projetar esse ponto pois, o mesmo já pertence a  $R$  que era nosso objetivo inicial. Como uma medição física acaba muitas vezes não sendo exata, mas uma estimativa influenciada por outros fatores ela acarreta em defeitos na imagem final reconstruída.

**Teorema 1** *Se  $R$  é a interseção não vazia de todos os hiperplanos  $A_i$  e a sequência de  $r^k$ 's do Algoritmo 1 é tal que*

$$0 < \liminf r^k \leq \limsup r^k < 2 \quad (3.21)$$

*então a sequência  $x^0, x^1, x^2, \dots$  converge para algum elemento de  $R$ .*

**Demonstração:** Na seguinte demonstração da convergência da sequência  $x^0, x^1, x^2, \dots$  assumiremos que existe  $v$  e  $w$  tais que para todo  $k$ ,

$$0 < v \leq r^k \leq w < 2. \quad (3.22)$$

Esta hipótese pode ser feita sem perda de generalidade, uma vez que é certamente verdade para todo  $k$  maior que algum  $\bar{k}$  e assim  $x^k$  pode ser escolhido como o ponto de partida de nosso algoritmo.



Seja  $k$  algum inteiro não negativo tal que  $x^k \notin A_i$  e  $\|a_i\| \neq 0$ , onde  $i = (k \bmod m) + 1$ . Então

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\|^2 &= \|x^k + c^k a_i - x^k\|^2 = \|c^k a_i\|^2 = \left\| r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} \right\|^2 \cdot \|a_i\|^2 \\ &= \left( r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} \right)^2 \|a_i\|^2 = (r^k)^2 \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|^2}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 = (r^k)^2 \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|^2} \quad (3.23)$$

Seja  $z$  um elemento de  $R$ . Usando os fatos de que  $\langle a_i, z \rangle \leq b_i$  e  $\langle a_i, x^k \rangle > b_i$ , o primeiro devido ao fato de  $z \in R$  e o segundo pelas características do algoritmo “que deixa de projetar os pontos que já pertencem à  $R$ ”, temos que

$$-r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} \langle a_i, z \rangle \leq -r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} b_i. \quad (3.24)$$

Usando (3.23), (3.24) e a positividade de  $c^k$  temos que

$$\begin{aligned} \langle x^{k+1} - x^k, x^k - z \rangle &= \langle x^k + c^k a_i - x^k, x^k - z \rangle = \langle c^k a_i, x^k - z \rangle \\ &= r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} \langle a_i, x^k - z \rangle = r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} [\langle x^k, a_i \rangle - \langle z, a_i \rangle] \\ &\stackrel{(3.24)}{\leq} r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} [\langle x^k, a_i \rangle - b_i] = -r^k \frac{b_i - \langle a_i, x^k \rangle}{\|a_i\|^2} [b_i - \langle x^k, a_i \rangle] \\ &\leq -r^k \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|^2} \stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{r^k} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$(*) -\frac{1}{r^k} \|x^{k+1} - x^k\|^2 = -\frac{1}{r^k} (r^k)^2 \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|^2} = -r^k \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|^2}$$

Disto obtemos que:

$$\|x^{k+1} - z\|^2 = \|x^{k+1} - x^k + x^k - z\|^2$$

$$\langle x^{k+1} - x^k + x^k - z, x^{k+1} - x^k + x^k - z \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x^k \rangle + 2 \langle x^{k+1} - x^k, x^k - z \rangle + \langle x^k - z, x^k - z \rangle \\
&\quad \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 + 2 \langle x^{k+1} - x^k, x^k - z \rangle + \left\| x^k - z \right\|^2 \\
&\leq \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 - \frac{2}{r^k} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 + \left\| x^k - z \right\|^2 \\
&= \left( 1 - \frac{2}{r^k} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 + \left\| x^k - z \right\|^2. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Segue que

$$\left\| x^{k+1} - z \right\|^2 + \left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \leq \left\| x^k - z \right\|^2. \tag{3.27}$$

Como  $\left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) > 0$

$$\left\| x^{k+1} - z \right\|^2 \leq \left\| x^k - z \right\|^2 + \left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \leq \left\| x^k - z \right\|^2. \tag{3.28}$$

Provamos a equação (3.27) supondo que  $x^k \notin A_i$  e  $\|a_i\| \neq 0$ , entretanto quando qualquer dessas duas hipóteses é falsa temos que

$$x^{k+1} = x^k$$

e a equação (3.27) é trivialmente satisfeita.

Caso contrário (as hipóteses são todas falsas) temos da equação (3.22) o seguinte:

$$\left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) \geq \left( \frac{2}{w} - 1 \right) = \frac{2-w}{w} > 0 \tag{3.29}$$

e assim a sequência  $\|x^k - z\|^2$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$  é não crescente. Como ela é limitada inferiormente, pois toda norma é não negativa,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|^2$  existe, pois toda sequência monótona e limitada converge. Como  $\|x^k - z\|^2$  é convergente, digamos  $\|x^k - z\|^2 \rightarrow \gamma$ , temos que  $\|x^{k+1} - z\|^2 \rightarrow \gamma$ . Aplicando o “teorema do confronto (ou teorema do sanduíche)” na desigualdade (3.28) temos que

$$\left( \left\| x^{k+1} - z \right\|^2 + \left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right) \rightarrow \gamma,$$

mas  $\|x^{k+1} - z\|^2 \rightarrow \gamma$  e assim  $\left( \left( \frac{2}{r^k} - 1 \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right) \rightarrow 0$ . Da desigualdade (3.29) temos que

$\left(\frac{2}{r^k} - 1\right) > 0$ , portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\|^2 = 0. \quad (3.30)$$

Como  $\|x^k - z\|^2$  é convergente então ela é limitada, ou seja,  $\|x^k - z\|^2 \leq M_1, M_1 > 0$ . Como  $z \in R$  é um ponto fixo segue que

$$\|x^k\| = \|x^k - z + z\| \leq \|x^k - z\| + \|z\| \leq M_1 + \|z\| = M, M > 0,$$

ou seja,  $\|x^k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Assim obtemos que  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  é limitada. Sendo a sequência  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  limitada então existe pelo menos uma subsequência infinita convergindo para algum vetor digamos  $y$ .

Vamos mostrar que  $y \in R$  e que  $y$  é independente da subsequência que estamos usando na sua construção.

Considere uma subsequência infinita de  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , que converge para um vetor  $y$ . Seja  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq i \leq m$ . Vamos mostrar que  $y \in A_i$ .

Se  $\|a_i\| = 0$  como  $R \neq \emptyset$  temos que todos os vetores são elementos de  $A_i$ .

Vamos tomar  $\|a_i\| \neq 0$  e mostrar que para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\langle a_i, y \rangle - b_i < \varepsilon$ .

Seja

$$\lambda = \min \frac{(1, v)}{\|a_i\|} \quad (3.31)$$

onde  $v$  é definido na equação (3.22).

$\forall \varepsilon > 0, \exists x^{(t)}$  uma subsequência infinita de  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , que converge para  $y$  tal que

$$\|x^{(t)} - y\| < \frac{\lambda \varepsilon}{2m}. \quad (3.32)$$

Visto que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$  este elemento  $x^{(t)}$  pode ser escolhido de modo que

$$\|x^{(s+1)} - x^{(s)}\| < \frac{\lambda \varepsilon}{2m} \quad (3.33)$$

$\forall s \geq t$ , existe um elemento  $s$  tal que  $t \leq s < t + m$  e  $i = (s \bmod m) + 1$ .

Para este  $s$

$$\|x^{(s)} - y\| \underbrace{\leq}_{(*)} m \frac{\lambda}{2m} \varepsilon \underbrace{\leq}_{(3.31)} \frac{1}{2 \|a_i\|} \varepsilon. \quad (3.34)$$

(\*)  $\|x^{(s)} - y\| < \frac{\lambda}{2m} \varepsilon$  por (3.32)

Se  $x^{(s)} \notin A_i$  a equação (3.23) nos diz:

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 = (r^k)^2 \frac{(b_i - \langle a_i, x^k \rangle)^2}{\|a_i\|},$$

logo,

$$\langle a_i, x^{(s)} \rangle - b_i = \frac{\|a_i\|}{r^{(s)}} \|x^{(s+1)} - x^{(s)}\| \quad (3.35)$$

$$\frac{\|a_i\|}{r^{(s)}} \|x^{(s+1)} - x^{(s)}\| \underbrace{\leq}_{(3.33)} \frac{\|a_i\|}{r^{(s)}} \frac{\lambda \varepsilon}{2m} \underbrace{\leq}_{(3.31)} \frac{\|a_i\|}{r^{(s)}} \frac{\nu}{\|a_i\|} \frac{\varepsilon}{2m} \underbrace{\leq}_{(3.31)} \frac{1}{2} \varepsilon \quad (3.36)$$

Se  $x^{(s)} \in A_i$  então a equação (3.36) é trivialmente verdadeira.

Portanto temos:

$$\begin{aligned} \langle a_i, y \rangle - b_i &= \langle a_i, y - x^{(s)} + x^{(s)} \rangle - b_i = \langle a_i, y - x^{(s)} \rangle + \langle a_i, x^{(s)} \rangle - b_i = \\ &= \langle a_i, x^{(s)} \rangle - b_i + \langle a_i, y - x^{(s)} \rangle = \langle a_i, x^{(s)} \rangle - b_i + \|a_i\| \cdot \|y - x^{(s)}\| \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$= \langle a_i, x^{(s)} \rangle - b_i + \|a_i\| \cdot \|y - x^{(s)}\| \underbrace{\leq}_{(3.36)} \frac{1}{2} \varepsilon + \|a_i\| \|y - x^{(s)}\| \underbrace{\leq}_{(3.34)} \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad (3.38)$$

Como  $\varepsilon$  foi tomado arbitrariamente segue que  $\langle a_i, y \rangle \leq b_i$ , ou seja,  $y \in A_i$ .

Vamos provar isto para um  $i$  arbitrário  $1 \leq i \leq m$ , e assim,  $y \in R$ . Para tal suponha que existe uma outra subsequência que converge para  $y'$ , como dito acima. Podemos mostrar que para algum  $z \in R$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|^2$  existe.

Considere

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \|x^k - y\|^2 - \|x^k - y'\|^2 \right). \quad (3.39)$$

Usando a subsequência que converge para  $y$  temos:

$$\alpha = -\|y - y'\|^2, \quad (3.40)$$

e usando a outra subsequência:

$$\alpha = \|y' - y\|^2. \quad (3.41)$$

Logo  $\alpha = 0$  e  $y = y'$  e portanto a sequência  $(x^k)$  tem um único ponto de acumulação.

Já provamos até agora que  $(x^k)$  é limitada e tem um único ponto de acumulação, logo pelo resultado apresentado no Capítulo 2 a sequência  $(x^k)$  é convergente.  $\square$

### 3.5 Métodos de relaxação para equações lineares

A nossa intuição nos diz que o problema da reconstrução de imagem deve ser representado por um sistema linear de equações ao invés de um sistema linear de desigualdades. A abordagem de que cada uma das projeções nos dá com uma equação linear (ao invés de um par das desigualdades), tem sido muitas vezes tomadas na literatura da reconstrução (ver, por exemplo, [13, HERMAN, 1980], [15, HERMAN, LENT e LUTZ,1978], [16, HERMAN, LENT e LUTZ,1975]) e produz reconstruções de boa qualidade.

Entendendo um sistema coerente de equações lineares como sendo um sistema sobredeterminado e proveniente das medições de um tomógrafo as referências [13, HERMAN, 1980], [15, HERMAN, LENT e LUTZ,1978] e [16, HERMAN, LENT e LUTZ,1975]) nos dizem que o método de relaxamento pode ser aplicado sobre o sistema linear e que o mesmo apresenta uma sequência que converge para a solução de norma mínima das equações.

Em outras palavras vamos considerar um conjunto de  $m$  equações

$$\langle a_i, x \rangle = b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq m.$$

Seja

$$L = \{x / \langle a_i, x \rangle = b_i, \text{ para } 1 \leq i \leq m\}.$$

Se considerarmos cada equação  $\langle a_i, x \rangle = b_i, 1 \leq i \leq m$  como um par de desigualdades, então  $L$  é o mesmo conjunto  $R$  da seção anterior.

Definimos o seguinte algoritmo

#### **Algoritmo 2** (para equações)

$x^0$  é arbitrária,

$$x^{(k+l)} = x^k + c^k a_i,$$

onde  $i = (k \bmod m) + 1$  e  $c^k$  é um múltiplo escalar.

Temos então que se a sequência  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$  do Algoritmo 2 converge para um elemento de  $L$ , então ela converge para o elemento de menor norma que é o elemento mais próximo da solução que procuramos. Não discutiremos estes resultados aqui, entretanto uma apresentação mais ampla destes resultados pode ser vista em [13, HERMAN, 1980], [15, HERMAN, LENT e LUTZ, 1978], [11, GORDON, 1974] e [16, HERMAN, LENT e LUTZ, 1975]). E aplicações de TRA em [3, BENDER, GORDON e HERMAN, 1970], [18, HERMAN, MEYER 1993] e [14, HERMAN, 1991].

## 4 Resultados

O objetivo deste capítulo é testar o algoritmo descrito no capítulo anterior em um conjunto de dados simulados. A simulação nos permite controlar os dados e acompanhar o desempenho do algoritmo de reconstrução em situações onde os dados são obtidos com erros ou não.

Vamos tomar a Figura 4.1 que consiste de um pequeno pedaço de uma imagem de dimensão  $3 \times 3$  pixels, onde cada um dos pixels possui um peso associado.

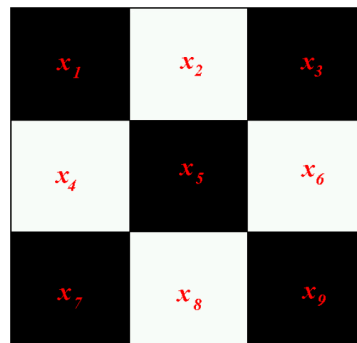


Figura 4.1: Exemplo.

Vamos Considerar 12 raios sobre a imagem conforme ilustrado na Figura 4.2 e fazer a soma dos pesos montando um sistema de 12 inequações. Por exemplo o raio 2 passa pelos pixels  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_6$ , então ele gera a inequação  $x_4 + x_5 + x_6 \leq 120$ .

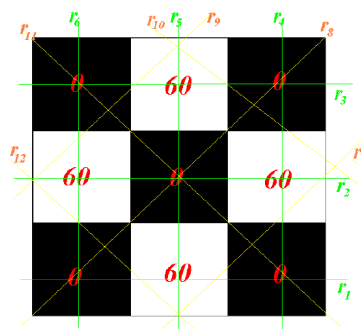


Figura 4.2: Medições.

Cada inequação define um hiperplano no espaço. O algoritmo toma uma solução inicial  $x_0$  qualquer, por exemplo a origem e projeta ortogonalmente sobre um hiperplano. O ponto obtido pela projeção sobre o último hiperplano é projetado novamente sobre o próximo hiperplano até o último hiperplano, completando o primeiro ciclo ou primeira iteração. O ponto que corresponde

à projeção sobre o último hiperplano é novamente projetado sobre o primeiro hiperplano até completar mais um ciclo e assim por diante conforme ilustrado na Figura 4.3.

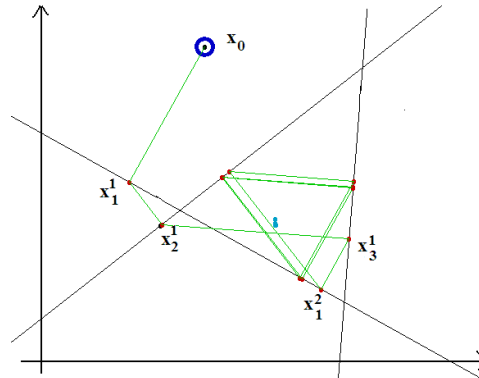


Figura 4.3: Ilustração geométrica do algoritmo.

Após 20 iterações a reconstrução da imagem fica conforme ilustrado na Figura 4.4, muito semelhante à imagem inicial. Como demonstramos anteriormente, sob certas hipóteses, a sequência do algoritmo converge e assim temos uma reconstrução da imagem.

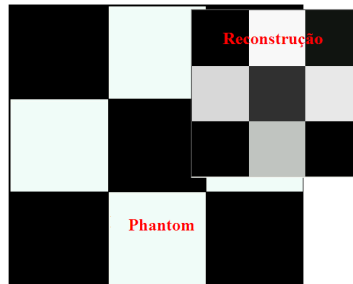


Figura 4.4: Reconstrução do exemplo.

## 4.1 Obtenção do conjunto de dados

Para testar o algoritmo vamos simular uma imagem, com dimensão maior, em tons de cinza, a qual sofrerá um processo de digitalização igual ou o mais semelhante possível à obtenção de dados reais. Essa simulação pode levar em conta os erros de medição e efeitos físicos indesejáveis das radiações durante as medições.

Na prática, apesar de se tomar o maior cuidado possível na coleta dos dados, a precisão das medições nunca é perfeita, pois o processo de obtenção dos dados envolve movimentações mecânicas as quais podem gerar imprecisões de posicionamento geométrico. Dependemos ainda de vários fenômenos físico-químicos usados para obter os dados das medições, por exemplo, utilizamos feixes de radiação dos quais podemos apenas estabelecer uma faixa de in-



tensidade e como o que se mede é exatamente a sua intensidade após atravessar o corpo em estudo ficamos sujeitos a dados imprecisos. Outro problema físico são as interações da radiação com a matéria que além da atenuação que estamos interessados, acumulam desvios de sua rota original e demais efeitos indesejáveis já descritos no Capítulo 2.

## 4.2 Qualidade da reconstrução obtida

Como não podemos olhar a seção diretamente para dizer se imagem ficou fiel ao objeto real necessitamos de modelos para testar o funcionamento do algoritmo. As imagens de objetos simulados, “Phantoms”, permitem essa comparação, pois conhecemos a imagem que o algoritmo deve produzir. Um Phantom clássico é o Shepp-Logan que podemos observar na Figura 4.5.



Figura 4.5: Shepp-Logan um Phantom clássico.

Podemos comparar as imagens visualmente, entretanto essa é uma medida muito subjetiva e pode causar falsas impressões sobre a qualidade da reconstrução da imagem. Uma maneira de estabelecer um padrão de comparação é tomar uma fileira de pixels da imagem “original” e compará-la com a mesma fileira da figura reconstruída pelo algoritmo, conforme sugerido em [13, HERMAN, 1980]. Para tanto, tomamos a posição dos pixels das respectivas fileiras e estabelecemos uma função cuja imagem da respectiva posição do pixel é sua atenuação, ou seja, a respectiva tonalidade de cinza, conforme esquematizado na Figura 4.6. Assim quanto mais próxima da função gerada pelo modelo ficar a função gerada pela reconstrução mais eficiente é o algoritmo e a qualidade da imagem é maior. Na Figura 4.6 a densidade da imagem reconstruída é representada por uma linha com maior espessura.

Para aumentar o número de ferramentas e avaliar a qualidade da imagem de resolução  $l \times l$  temos as medidas descritas em [13, HERMAN, 1980]. Assim  $t_{u,v}$  e  $r_{u,v}$  representam as respectivas atenuações do modelo e da reconstrução do pixel de coordenadas  $u, v$ . O parâmetro

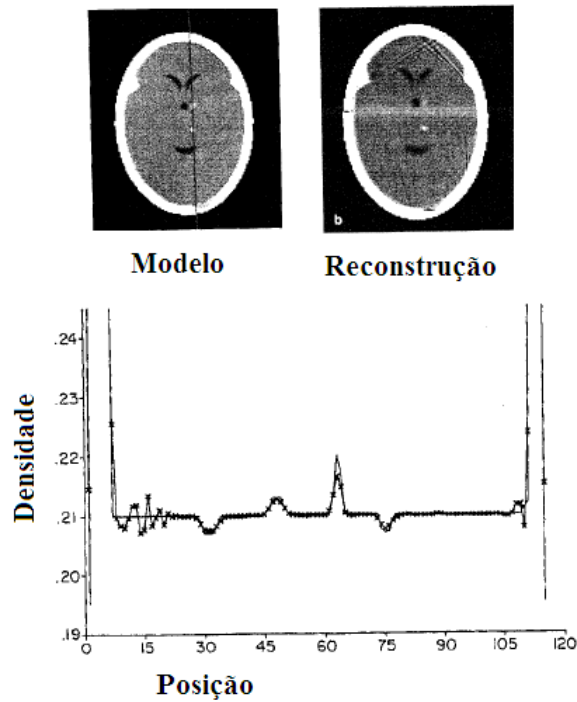


Figura 4.6: Compara a imagem gerada com o modelo ideal (figura adaptada de [13, HERMAN, 1980]).

$t$  denota a média de todas as densidades dos pixels digitalizados.

$$d = \left( \frac{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l (t_{u,v} - t)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$r = \left( \frac{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^l \sum_{v=1}^l |t_{u,v}|} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$e = \max |T_{i,j} - R_{i,j}|, \quad 1 \leq i \leq l/2, \quad 1 \leq j \leq l/2$$

onde

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (t_{2i,2j} + t_{2i+1,2j} + t_{2i,2j+1} + t_{2i+1,2j+1})$$

e

$$R_{i,j} = \frac{1}{4} (r_{2i,2j} + r_{2i+1,2j} + r_{2i,2j+1} + r_{2i+1,2j+1}).$$

Deste modo  $d$  compara e trata erros em grandes regiões enquanto que  $r$  mede os erros em pequenas regiões. Como na prática cada pixel não corresponde exatamente a seu tamanho no

objeto real, mas sim uma média da atenuação de um conjunto de pixels, assim *e* avalia o pior erro entre os pequenos e grandes erros e estabelece uma medida de confiabilidade da estimativa da medida da densidade de cada pixel. A melhor medida do processo de reconstrução é o seu desempenho na situação clínica de diagnóstico.

O grande sucesso da reconstrução está em coletar os dados das medições com o menor erro possível ou conhecer o erro acumulado nas medições para poder corrigi-lo durante ou mesmo após o processo de reconstrução da imagem.

### 4.3 Construção do Aplicativo

Conforme já descrito dependemos de medidas físicas as quais geram imprecisão da obtenção dos dados para a reconstrução de cada imagem. Desta forma podemos simular dados com erro ou livres de erros de medição. A justificativa disto está em estudar o comportamento do algoritmo frente aos erros práticos [13, HERMAN, 1980] os quais são simulados segundo fatores e métodos estatísticos, já descritos nos Capítulos 1 e 2.

Vamos assumir duas geometrias básicas para a coleta de dados: a dos aparelhos de primeira e terceira geração, já descritos no Capítulo 2 onde a primeira geometria é caracterizada pelo feixe em paralelo e a segunda pelo feixe em forma de cone. Os dados são obtidos por um algoritmo simples implementado em “Visual Basic 6” que gera as densidades medidas em cada feixe e os respectivos coeficientes da equação gerada por esse feixe com base no Phantom utilizado na simulação.

Para avaliar o algoritmo estudado e resolver o problema da reconstrução de imagens desenvolvemos um aplicativo. Escolhemos o “Visual Basic 6” uma vez que o mesmo atendia nossas necessidades gráficas e matemáticas.

A interface do aplicativo é simples, conforme podemos observar na Figura 4.7, se-melhante aos aplicativos do “Microsoft Windows” com barras de menu e ferramentas, os quais permitem ao usuário definir o conjunto de dados que está trabalhando, o algoritmo que irá aplicar para a reconstrução e definir alguns parâmetros e constantes. Como trabalha em muitos casos com um conjunto de dados simulados e conhecidos o aplicativo nos permite comparar o resultado de reconstrução de imagem obtido com a imagem original. Também exibe a malha e as posições geométricas dos raios utilizados nas medições.

Seu objetivo inicial é reconstruir imagens de objetos simulados utilizando alguns algoritmos da classe conhecida como ART (Algebraic Reconstruction Techniques), ou em português TRA

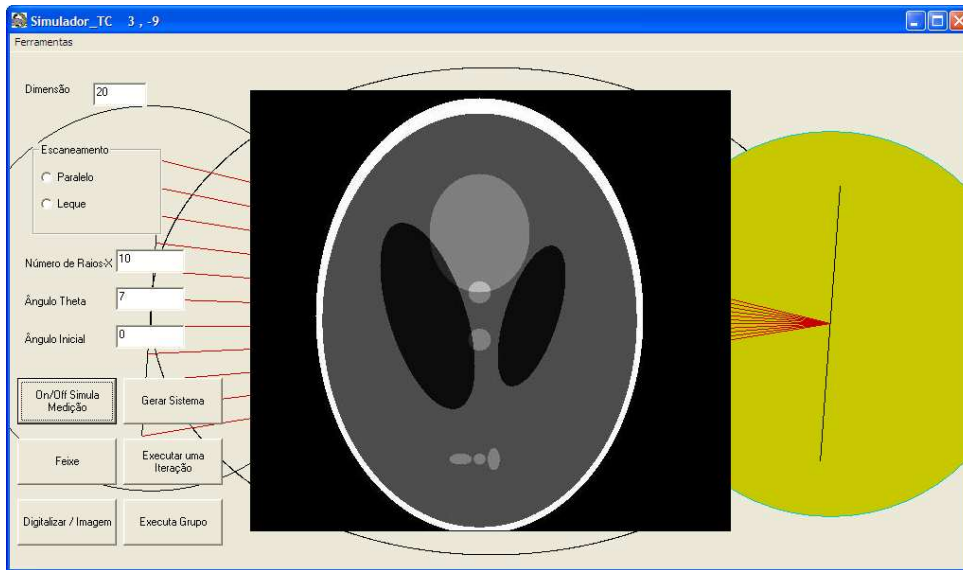


Figura 4.7: Interface do aplicativo.

(Técnicas de Reconstrução Algébrica).

## 4.4 Resultados obtidos

Simulando o Phantom clássico Shepp-Logan representado na Figura 4.5 obtemos as seguintes reconstruções ilustradas na Figura 4.8 com resolução  $30 \times 30$  pixels

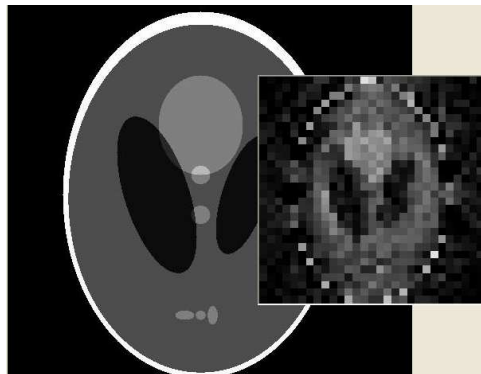


Figura 4.8: Reconstrução com resolução  $30 \times 30$  pixels.

e com resolução  $40 \times 40$  pixels na Figura 4.9. A simulação das medições é feita sobre uma malha de igual dimensão das reconstruções e a densidade do respectivo pixel é tomada como sendo a densidade do pixel central de cada elemento da malha.

Utilizando feixes em leque com medições a cada ângulo de 7 graus e 10 feixes por medição obtemos as seguintes reconstruções ilustradas nas Figuras 4.10 e 4.11.

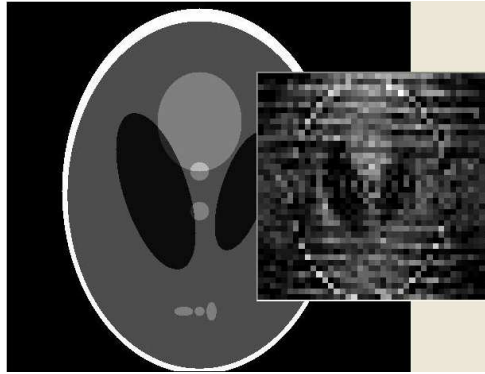


Figura 4.9: Reconstrução com resolução  $40 \times 40$  pixels.

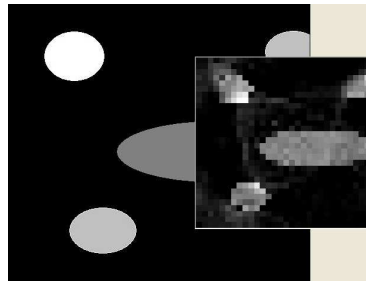


Figura 4.10: Reconstrução com resolução  $40 \times 40$  pixels.

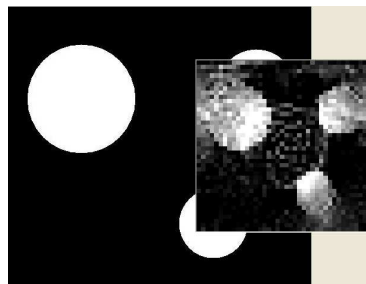


Figura 4.11: Reconstrução com resolução  $40 \times 40$  pixels.

# Conclusão

## 4.1 Considerações

Trabalhar com tomografia é realmente um grande desafio. O assunto é bem amplo e a busca por tentar compreender ao máximo essa área é no mínimo empolgante. Um assunto que parece todo resolvido mostra um leque enorme de novas aplicações, algoritmos e resultados a serem melhorados.

Simulamos várias reconstruções, utilizando as técnicas de reconstrução algébrica descritas no Capítulo 3, de objetos clássicos como o Shepp-Logan e de outros phantoms teóricos criados por nós.

Durante a criação, programação e execução do aplicativo, nossa ferramenta de trabalho, notamos o quanto cada detalhe é importante na imagem final. Uma simples medição a mais ou uma variação em um parâmetro pode fazer toda a diferença na reconstrução final.

A resolução utilizada na reconstrução é fundamental na qualidade do resultado final. Observamos durante as simulações que um número grande de raios (medições) é importante, mas é necessário que esses raios tenham uma distribuição espacial homogênea na varredura. Todos esses fatores aliados a alguns ajustes do parâmetro de relaxamento e uma coleta de dados cuidadosa visando minimizar erros nos coeficientes do sistema resultam em uma reconstrução mais fiel ao phantom inicial.

## 4.2 Sugestões para Pesquisas Futuras

- Continuar a desenvolver o aplicativo ampliando o número de ferramentas e qualidade de reconstrução.
- Estudar e programar mais métodos de reconstrução.
- Utilizar dados e medições experimentais no aplicativo desenvolvido.
- Fazer um estudo para verificar as possibilidades de aplicações das técnicas de reconstrução algébricas estudadas nas outras modalidades de tomografia.

## Referências Bibliográficas

- [1] ANTON, H. **Álgebra Linear com Aplicações**, Porto: Bookman., 2001.
- [2] ARAÚJO, E. C. A. **Estudo e Aplicações do Algoritmo FDK para a Reconstrução de Imagens Tomográficas Multi-Cortes**, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2008.
- [3] BENDER, R., GORDON, R. E HERMAN, G. T. **Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three Dimensional Electron Microscopy and X-Ray photography**, *Journal of Theoretical Biology*, 29 ,(1970) 471-480.
- [4] BISCEGLI, C. I. **Conceitos da Física do Ultra-som**, Embrapa Instrumentação Agropecuária, USP, 2004.
- [5] CORMACK, A. M., **Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications.**, *Journal of Applied Physics*, 34, (1963) 2722-2727
- [6] CORMACK, A. M., KOEHLER, A. M., **Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. II**, *Journal of Applied Physics*, 35, (1964) 2908-2913
- [7] CORMACK, A. M., KOEHLER, A. M., **Quantitative Proton Tomography**, *Phys. Med. Biol*, 21, (1976) 560-69.
- [8] EVANS, N. T. S., KEYESF, W. I., SMITH, D., COLEMANS, J., CUMPSTEYLL, D. **The Aberdeen Mark II single-photon-emission tomographic scanner: specification and some clinical applications**, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 31, No. 1, 65-78, 1986.
- [9] FIGUEROA, T. P. **Estudo Sobre a Viabilidade da Tomografia Eletromagnética na Medição do Perfil de Velocidades de Escoamentos Monofásicos em Dutos**, Tese de Doutorado, Universidade Federal de São Carlos, 2005.
- [10] GERALDES, C.F.G.C. E SIMÕES, G. V. M., **Ressonância Magnética Nuclear - Fundamentos, Métodos e Aplicações**, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987.
- [11] GORDON, R. **A tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Technique)**, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-21:78-93, 95, 1974.
- [12] GORDON, R., HERMAN, G. T. E JOHNSON S. A., **Image Reconstruction from Projections**, em *Scientific American*, 233 ,(1975) 56-61 e 64-68.
- [13] HERMAN, G.T. **Image Reconstruction From Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography**, New York: Academic Press., 1980.
- [14] HERMAN, G. T., **Performance Evaluation of an Iterative Image Reconstruction Algorithm for Positron Emission Tomography**, *IEEE Trans. Med. Imaging*, 10, (1991) 336-346.

- [15] HERMAN, G.T., LENT, A. E LUTZ, P.H., **Relaxation Methods for Image Reconstruction.**, ACM, vol 21, Feb. 1978, pp. 152-158.
- [16] HERMAN, G.T., LENT, A. E LUTZ, P.H., **Iterative relaxation methods for image reconstruction.**, Proc. ACM '75 Annual Conf., Minneapolis, Minn., Oct. 1975, pp. 169-174.
- [17] HERMAN, G. T. AND ODHNER, D. **Performance Evaluation of an Iterative Image Reconstruction Algorithm for Positron Emission Tomography**, IEEE Trans. Med. Imag., vol. 10, pp. 336-346, 1991.
- [18] HERMAN, G. T. AND MEYER, L. B. **Algebraic Reconstruction Techniques Can be Made Computationally Efficient**, IEEE Trans. Med. Imaging, 1993.
- [19] KAK, A. C. E SLANEY, M., **Principles of Computerized Tomographic Imaging**, IEEE Press, New York, 1988.
- [20] MASCHIO, M. **Tomografia Computadorizada de Raios-X como Técnica de Ensaios Não Destrutivos de Materiais**, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 1997.
- [21] NAJERA, O. C. U. **Tomografia de Emissão H-Alfa no Tokamak TCABR**, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2006.
- [22] NETO, E. S. H. **Teoria e Experimentação com Métodos Incrementais Relaxados em Tomografia por Emissão**, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.
- [23] DE PIERRO, A. R., YAMAGISHI, M. E. B. **Fast EM-like Methods for Maximum 'a posteriori' Estimates in Emission Tomography** , IEEE Trans. Med. Imag., 20(2001), pp. 280-288.
- [24] PIRES, L. F. **Tomografia Computadorizada, Atenuação de Raios Gama e Análise Micromorfológica na Avaliação de Alterações na Estrutura e Retenção de Água pelo Solo**, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2006.
- [25] SALINA, F. V. **Reconstrução Tomográfica de Imagens Utilizando Técnicas POCS Sequenciais e Paralelas**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2001.
- [26] SETTI, J. A. P. **Tomografia Computadorizada por Feixe de Prótons de Baixa Energia**, Tese de Doutorado, UTFPR, 2006.
- [27] INCOR, <http://www.incor.usp.br/spdweb/cursos/downloads/ptc5750-ultra-som2006.pdf>, acesso: 15/06/2009
- [28] SBM, [http://www.rmu.sbm.org.br/Conteudo/n12/n12\\_Artigo04.pdf](http://www.rmu.sbm.org.br/Conteudo/n12/n12_Artigo04.pdf), acesso: 15/06/2010
- [29] UNICAMP, <http://www.ime.unicamp.br/alvaro/matuniv.pdf>, acesso: 14/05/2010