

PAULO ROBERTO LOPES DE OLIVEIRA

**ANALISE NÃO LINEAR DE DEFORMAÇÃO LENTA UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado

Co-orientadora: Prof^ª. Mildred Ballin Hecke

Curitiba

2004

TERMO DE APROVAÇÃO

PAULO ROBERTO LOPES DE OLIVEIRA

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE DEFORMAÇÃO LENTA UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, com área de concentração em Mecânica Computacional, no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pelos professores:

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Eng.
Centro de Estudos de Engenharia Civil – CESEC / UFPR

Co-orientadora: Mildred Ballin Hecke, D.Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil – CESEC / UFPR

Prof. Raul Rosas e Silva, Ph.D.
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC / RIO

Prof. Pablo Andrés Muñoz Rojas, D. Eng.
UDESC – Joinville

Curitiba, 17 de dezembro de 2004.

*Dedico este trabalho a minha querida esposa Lisliane,
pelo apoio, as palavras de incentivo e amor
demonstrado em todos os momentos. E a minha filha
Ana Paula, que é uma benção em minha vida.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, pela bondade, fidelidade e pelas bênçãos que me tem concedido.

Aos meus pais José Carlos e Maria e meus irmãos, pelo apoio e amor.

Ao Professor Roberto Dalledone Machado, pela dedicação, orientação e o apoio despendido a este trabalho.

A Professora Mildred Ballin Hecke , pela orientação e apoio que tem me dado.

Aos professores, funcionários e colegas do CESEC.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| AGRADECIMENTOS..... | 3 |
| SUMÁRIO..... | 4 |
| LISTA DE FIGURAS | 6 |
| LISTA DE GRÁFICOS | 7 |
| LISTA DE TABELAS..... | 8 |
| LISTA DE SÍMBOLOS..... | 9 |
| RESUMO | 12 |
| ABSTRACT | 13 |
| 1- INTRODUÇÃO | 14 |
| 1.1- DEFINIÇÃO DO TEMA E OBJETIVOS..... | 14 |
| 1.2- REVISÃO DA LITERATURA..... | 17 |
| 1.3 - DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS..... | 23 |
| 2- REVISÃO TEÓRICA DO FENÔMENO DE <i>CREEP</i> | 24 |
| 2.1.1 - COMPORTAMENTO DE UM SÓLIDO ELÁSTICO | 27 |
| 2.1.2 - COMPORTAMENTO DE UM FLUIDO VISCOSO | 29 |
| 2.1.4 – MODELO DE MAXWELL | 31 |
| 2.1.5 – MODELO DE KELVIN..... | 34 |
| 2.1.6 – MODELOS COMPOSTOS..... | 36 |
| 2.1.7 – MODELOS GENERALIZADOS..... | 39 |
| 2.1.7.1 – <i>Modelo de Maxwell Gneralizado</i> | 39 |
| 2.1.7.2 – <i>Modelo de Kelvin Generalizado</i> | 40 |

| | |
|--|------------|
| 3- MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O FENÔMENO DE <i>CREEP</i>..... | 43 |
| 3.1- <i>CREEP</i> SOB ESTADO UNIAXIAL DE TENSÃO | 43 |
| 3.1.1 - Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido (<i>Time Hardening Theory</i>)..... | 46 |
| 3.1.2- Teoria de Endurecimento por Deformação (<i>Strain Hardening Theory</i>) | 48 |
| 3.2 <i>CREEP</i> SOB ESTADO MULTIAXIAL DE TENSÃO | 50 |
| 4 – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA SOLUÇÃO DO FENÔMENO DE <i>CREEP</i>..... | 55 |
| 4.1 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... | 55 |
| 4.2 - FOMULAÇÃO DO ELEMENTO BIDIMENSIONAL | 56 |
| 4.3- PRINCÍPIOS VARIACIONAIS DE <i>CREEP</i> ESTACIONÁRIO | 60 |
| 4.4- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AO <i>CREEP</i> ESTACIONÁRIO... | 68 |
| 4.5 ESTADO PLANO DE TENSÃO | 72 |
| 4.6 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO | 76 |
| 4.6 ESTADO AXISSIMÉTRICO DE TENSÃO | 77 |
| 4.7 – PROCESSO DE SOLUÇÃO NÃO LINEAR..... | 79 |
| 5 - VERIFICAÇÕES NUMÉRICAS | 84 |
| 5.1 - VIGA SOB FLEXÃO PURA..... | 84 |
| 5.2 - VIGA SOB FLEXÃO COMPOSTA | 90 |
| 5.3 – PROBLEMA AXISSIMÉTRICO..... | 93 |
| 6- CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE | 99 |
| REFERÊNCIAS..... | 102 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| FIGURA 1 - ESQUEMA DE DEFORMAÇÃO DE UMA VIGA SOB FLEXÃO | 16 |
| FIGURA 2 - CURVA DE <i>CREEP</i> | 24 |
| FIGURA 3 - CURVAS DE <i>CREEP</i> PARA VARIAÇÕES DE TENSÃO A TEMPERATURA CONSTANTE | 26 |
| FIGURA 4 – MODELO DE MOLA..... | 28 |
| FIGURA 5- GRÁFICO TENSÃO E DEFORMAÇÃO POR TEMPO, MATERIAL SÓLIDO ELÁSTICO | 29 |
| FIGURA 6 - MODELO AMORTECEDOR..... | 30 |
| FIGURA 7 – GRÁFICOS TENSÃO, DEFORMAÇÃO E TAXA DE DEFORMAÇÃO PELO TEMPO, MATERIAL VISCOSO | 30 |
| FIGURA 8 – MODELO DE MAXWELL | 32 |
| FIGURA 9 – MODELO DE KELVIN | 34 |
| FIGURA 10 – MODELO COMPOSTO MAXWELL-KELVIN EM SÉRIE..... | 36 |
| FIGURA 11 – MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM SÉRIE | 39 |
| FIGURA 12 – MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM PARALELO | 40 |
| FIGURA 13 – MODELO DE KELVIN GENERALIZADO EM PARALELO..... | 41 |
| FIGURA 14 – MODELO DE KELVIN GENERALIZADO EM SÉRIE..... | 41 |
| FIGURA 15 - TEORIAS DE ENDURECIMENTO POR TEMPO TRANSCORRIDO OU POR DEFORMAÇÃO | 46 |
| FIGURA 16- CONVERGÊNCIA PELO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON | 81 |
| FIGURA 17 - CONVERGÊNCIA PELO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MODIFICADO | 82 |
| FIGURA 18 – VIGA SOB FLEXÃO PURA | 85 |
| FIGURA 19 – VIGA SOB FLEXÃO COMPOSTA..... | 91 |
| FIGURA 20 – GEOMETRIA E MALHA DO TUBO ESPESSE – PROBLEMA AXISSIMÉTRICO | 94 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|----|
| GRÁFICO 1 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES ELASTICAS E ATENSÃO DE CREEP PARA A LEI DE NORTON | 86 |
| GRÁFICO 2 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS DIVERSAS LEIS DE <i>CREEP</i> E A SOLUÇÃO ANALÍTICA | 87 |
| GRÁFICO 3 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI NORTON, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG | 88 |
| GRÁFICO 4 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA DE LEI PRANDTL, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG | 88 |
| GRÁFICO 5 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DE DORN, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG | 89 |
| GRÁFICO 6 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DE GAROFALO, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG | 89 |
| GRÁFICO 7 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS LEIS <i>CREEP</i> , OBTENÇÃO DA TENSÃO EFETIVA | 91 |
| GRÁFICO 8 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS LEI DE NORTON, PARA DIVERSOS VALORES DE OBTENÇÃO DA TENSÃO EFETIVA..... | 92 |
| GRÁFICO 9 – SOBREPOSIÇÃO DOS RESULTADOS..... | 93 |
| GRÁFICO 10 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI NORTON, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG..... | 96 |
| GRÁFICO 11 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI PRANDTL, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG..... | 97 |
| GRÁFICO 12 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DORN, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG..... | 97 |
| GRÁFICO 13 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI GAROFALO, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG..... | 98 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| TABELA 1 - PARÂMETROS PARA O AÇO 304SS (HEAT 9T4296) 593°C [XUE E WANG (1995)] . | 84 |
| TABELA 2 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO PURA..... | 86 |
| TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O PROBLEMA AXISSIMÉTRICO..... | 96 |

LISTA DE SÍMBOLOS

- A, C, R – Constantes de *creep* do material.
 B – Matriz dos operadores diferenciais.
 D_e – Matriz das propriedades elásticas do material.
 D, D_T – Matriz das propriedades não lineares devido ao fenômeno de *creep*.
 E – Modulo de elasticidade.
 F – Força aplicada.
 F_e – Vetor de forças externas global.
 $F(\sigma), G(t), H(T)$ – Funções da tensão, tempo e temperatura respectivamente.
 I_2 – Segundo Invariante do tensor taxa de deformação.
 J_2 – Segundo Invariante do tensor desviador de tensões.
 J – Matriz jacobiana.
 K – Matriz de rigidez.
 K_e - Matriz de rigidez do elemento.
 N – Funções de interpolação.
 R – Constante de Boltzmann.
 S – Contorno do corpo em estudo.
 S_{ij} – Componentes do tensor desviatório de tensões, i e j variando de 1 a 3.
 T – Temperatura.
 \bar{T} – Vetor de forças prescritas no contorno S .
 T^L – Força de superfície no instante L (subscrito).
 U – Deslocamentos nodais.
 \dot{U} – Taxa de deslocamentos nodais.
 b, c, d, m, n, nn – Constantes de *creep* do material.
 \bar{b} – Vetor de forças de corpo.
 $f(\sigma), g(t), h(T)$ – Funções da tensão, tempo e temperatura respectivamente.
 l, l_o – Comprimento final e comprimento inicial.
 k – Constante de rigidez da mola.

r – Espessura.

t – Tempo.

t_0 – Tempo inicial.

u – Vetor deslocamento num ponto genérico.

$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \phi, \sigma^+$ – Constantes de *creep* do material.

ε – Deformação.

ε_0 – Deformação inicial elástica

ε_e – Deformação efetiva.

ε^c – Deformação de *creep*.

ε_{ij} – Componentes do tensor de deformação, i e j variando de 1 a 3.

$\dot{\varepsilon}$ – Taxa de deformação.

$\dot{\varepsilon}^c$ – Taxa de deformação de *creep*.

$\dot{\varepsilon}_e$ – Taxa de deformação efetiva.

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ – Componentes do tensor taxa de deformação, i e j variando de 1 a 3.

$\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ – Componentes do tensor taxa de deformação elástica, i e j variando de 1 a 3.

δ_{ij} – Delta de Kronecker, i e j variando de 1 a 3.

δ – Deslocamento.

μ_r – Coeficiente de viscosidade

σ – Tensão.

σ_0 – Tensão inicial.

σ_e – Tensão equivalente.

σ_k – Tensão na mola.

σ_μ – Tensão no amortecedor.

$\dot{\sigma}$ – Taxa de variação de tensão

σ_{ij} – Componentes do tensor de tensões de Cauchy, i e j variando de 1 a 3.

ν – Coeficiente de Poisson.

ΔH – Energia de ativação.

λ – Fator de penalidade.

ζ – Fator de proporcionalidade.

Δ – Operador diferencial.

ξ e η – Variável intrínseca no elemento cuja variação é $[-1,1]$

Π_p – Funcional que envolve o *creep*.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento e apresentar a modelagem de materiais sujeitos à deformação lenta ou *creep*. Desenvolveu-se uma formulação para a solução de problemas bidimensionais no estágio secundário, também denominado *creep* estacionário. A solução computacional do problema foi determinada pelo Método dos Elementos Finitos. Foram incorporadas no modelo diversas leis da viscoelasticidade encontradas na literatura, entre as quais, as de Norton, Prandtl, Dorn e Garofalo. A análise é não linear e o processo iterativo é realizado através do Método de Newton-Raphson. Alguns exemplos são apresentados e os resultados obtidos são comparados com os da literatura. Discute-se neste trabalho a eficiência do processo e as características de precisão e convergência.

Palavras-chave: Creep, Análise Não-linear, Método dos Elementos Finitos, Viscoelasticidade.

ABSTRACT

The objective of the present study is to evaluate the behavior and to present theoretical models to model of materials subject to the creep. A formulation was developed for the solution of problems in two dimensions in steady creep. The computational solution of the problem was determined by the Finite Elements Method. Several laws of viscoelasticity found in the literature such as Norton, Prandtl, Dorn and Garofalo were incorporated in the model. The analysis is non-linear and the convergence of results is obtained through the Newton-Raphson Method. Some examples are presented and the obtained results are compared with the ones in literature. In this work the efficiency of the process, the characteristics of precision and convergence are discussed.

Key words: Creep, Non-linear Analysis, Finite Elements Method, Viscoelastic.

1- INTRODUÇÃO

1.1- DEFINIÇÃO DO TEMA E OBJETIVOS

Muitos materiais possuem comportamento elástico quando submetidos a carregamentos. Em alguns outros, são observadas deformações lentas e contínuas quando carregados, e ao serem removidos os carregamentos, as deformações decrescem continuamente e segue-se uma tendência de recuperação da configuração inicial. Tais materiais são conhecidos como viscoelásticos. Dentre os materiais que possuem comportamento viscoelástico destacam-se: plásticos, fibras sintéticas ou naturais, madeira, materiais betuminosos, concreto e metais sujeitos a altas temperaturas. As características e intensidades do fenômeno de *creep* variam muito de um material para o outro. Assim, por exemplo, no concreto a idade é um fator importante, enquanto que a temperatura é determinante nos metais. Sendo o tempo um fator determinante no comportamento destes, os mesmos são designados por “materiais dependentes do tempo”.

O comportamento viscoelástico pode ser expresso por equações constitutivas que incluem o tempo como uma variável, além da tensão e deformação, o que torna o estudo muito mais difícil do que para os materiais que possuem comportamento independente do tempo. Um dos fenômenos dependentes do tempo é o *creep*.

Segundo FEIJÓO, TAROCO e GUERREIRO (1983) “O estudo do comportamento dos materiais estruturais de emprego freqüente em engenharia, sob condições especiais de carregamento, pode ser aproximado com êxito mediante a teoria da elasticidade ou mediante a teoria da plasticidade. Se o carregamento se mantém aplicado durante um período prolongado de tempo, os fenômenos reológicos têm caráter importante e se tornam necessários na análise. Em certos casos, as tensões e deformações se diferem em forma apreciável das que se obtém admitindo que o material é elástico ou plástico”.

Com o desenvolvimento industrial, muitas aplicações nas áreas térmicas, petroquímicas, nucleares, na fabricação de geradores de vapor, turbinas, caldeiras, etc, ocorridas com maior intensidade a partir da década de 50, passaram a ter maior influência do problema de *creep*. Observa-se que grande parte dos componentes das indústrias citadas trabalha sob temperaturas elevadas, o que requer uma maior eficiência termodinâmica dos equipamentos e maiores cuidados no que se refere às deformações lentas.

O fenômeno de *creep* é um processo termicamente ativo, mas nem por isso deve-se relacionar o *creep* sempre com altas temperaturas. Muitas vezes, dependendo do material, do nível de carregamento e do tempo de aplicação das cargas, este fenômeno se faz presente em temperaturas ambientes.

Deve-se ressaltar a importância de analisar o aumento de deformação causada pelo fenômeno de *creep*. Estas deformações levam o material ou a estrutura a um comportamento diferente do esperado na análise elástica, causando maiores deformações e uma redistribuição das tensões.

O aumento das deformações pode ser maior do que as especificadas em projetos e poderão causar, por exemplo, problemas em juntas de dilatação, não atendendo o Estado Limite de Serviço.

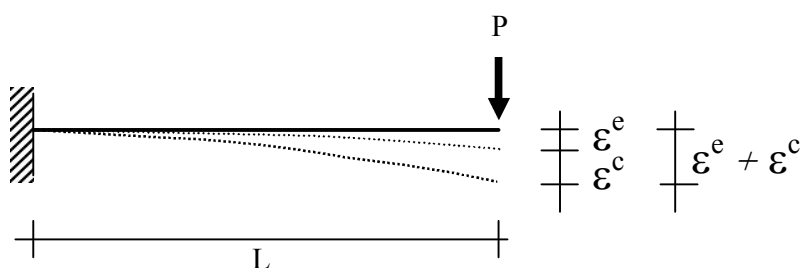
A redistribuição das tensões pode, ocasionalmente, causar um esgotamento da capacidade resistente em seções originalmente não críticas. Essa redistribuição deve ser considerada a fim de verificar o Estado Limite Último. Neste sentido, será apresentada uma forma para se calcular a tensão de referência, cuja importância é relacionada a diversos métodos de verificação da integridade estrutural.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver e verificar a formulação matemática, apresentada no trabalho de XUE e WANG (1995), que analisa o fenômeno de *creep* estacionário, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) em problemas bidimensionais, considerando as leis da viscoelasticidade de Norton,

Garofalo, Prandtl e Dorn, conforme mencionado por BOYLE (1983). São apresentados exemplos onde os resultados obtidos através destas quatro leis são comparados entre si e com a solução analítica. Como a análise é não linear, o processo iterativo é realizado pelos métodos de Newton Raphson e Newton Raphson Modificado.

A seguir é apresentada uma figura para ilustrar as deformações elásticas e inelásticas devido ao *creep*, para uma viga sob flexão. Considerando uma carga aplicada na extremidade livre da viga, observa-se uma deformação inicial elástica linear, com o passar do tempo segue uma deformação não linear devido ao fenômeno de *creep*. A deformação total é a soma da parcela elástica e não elástica devido ao *creep*.

FIGURA 1 - ESQUEMA DE DEFORMAÇÃO DE UMA VIGA SOB FLEXÃO



1.2- REVISÃO DA LITERATURA

As primeiras investigações sobre o fenômeno de *creep* foram realizadas em 1834 por um engenheiro francês VICAT (1834)* no “Laboratório Central de Ponts et Chaussées” através de ensaios a temperatura ambiente em barras de aço utilizadas na construção de pontes pênséis, conforme mencionado por FINDLEY, LAI e ONARAN (1989)¹.

Em virtude da dificuldade de representar os diferentes estados de tensão que se pode obter durante a vida útil da estrutura, ANDRADE (1910)* e NORTON (1929)* realizaram ensaios sob estados simples de tensão. Suas experiências tratavam de ensaios em fios sujeitos a seus pesos próprios em temperatura ambiente, onde se estabeleceu um processo de deformação do ponto de vista macroscópico. Posteriormente, na década de 70, ODQVIST (1972) e HAUPT (1977) passaram a generalizar estes resultados para estados mais complexos de tensões.

Devido ao fato de ser reduzido o número de problemas onde é possível obter soluções analíticas, métodos matemáticos e computacionais com soluções aproximadas tornaram-se necessários para resolução desses problemas. Dentre estes métodos destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste sentido o trabalho de GREENBAUM (1968)** marca o início das aplicações do MEF nesta área.

THURSTON (1895)* parece ser o primeiro a propor as três fases de *creep*, e ANDRADE (1910)* o primeiro a introduzir a terminologia empregada para distinguir as diferentes fases de *creep* e o primeiro a mostrar a diferença de comportamento entre as deformações lentas de barras metálicas a tensão constante e carga constante.

ANDRADE (1910)*, após investigar o fenômeno de *creep*, propôs a primeira lei de *creep* apresentada a seguir:

¹ Algumas referências que cujas publicações são mais antigas, são baseadas nos trabalhos apresentados por FINDLEY, LAI e ONARAN (1989)* e outras por FEIJÓO, TAROCO e GUERREIRO (1983)**.

$$l = l_0(1 + \beta t^{1/3})e^{\phi t} \quad (1)$$

onde l_0 e l são comprimento inicial e final do corpo respectivamente, t o tempo decorrido sob carregamento, β e ϕ constantes do material que dependem da tensão.

Desde então diversas equações empíricas foram propostas. A primeira expressão para o *creep* estacionário foi proposta por NORTON (1929)* juntamente com BAILEY (1930)*, que estabeleceram:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\sigma) = A\sigma^n \quad (2)$$

onde $\dot{\epsilon}$ é a taxa de deformação, σ tensão normal, A e n são constantes que dependem do material e para o aço n pode assumir valores entre 3 e 8, assim pode-se observar a forte não linearidade destas expressões. A equação (2) é conhecida na literatura como “power law”.

É interessante observar que a expressão (2) depende do nível de tensão. Para níveis relativamente baixos de tensão o mecanismo de fluência que predomina é o chamado “fluência por difusão” que se caracteriza por expressões do tipo:

$$\dot{\epsilon} = A\sigma \quad (3)$$

Para níveis mais elevados de tensão, o mecanismo de fluência que predomina é chamado “fluência por discordância”, caracterizada pela expressão potencial de Norton e Bailey, equação (2).

Em particular, as constantes A e n da equação (2) são estabelecidas, representando em escala logarítmica os valores de $\dot{\epsilon}$ e σ , obtidos dos ensaios de *creep* descritos, ou seja:

$$\log(\dot{\epsilon}) = \log(A) + n \log(\sigma) \quad (4)$$

Dessa forma, a inclinação da reta obtida com os resultados dos ensaios é o próprio valor de n e a interseção da reta com o eixo das ordenadas fornece o valor de $\log A$ e portanto o valor de A .

LUDWIK (1909)* apresentou uma expressão conhecida como lei exponencial sendo uma boa aproximação para taxa de *creep* durante o estágio secundário,

$$\dot{\epsilon} = R e^{\frac{\sigma}{\sigma^+}} \quad (5)$$

onde, R e σ^+ são constantes que dependem do material. Ambas as leis de Norton e de Ludwik foram usadas para obter as taxas de deformações apresentadas por metais ou outros materiais, quando submetidos a um estado uniaxial de tensão. Porém se a tensão é removida do material as expressões apresentam divergências, pois enquanto que na equação (5) a taxa de deformação torna-se uma constante R , na equação (2) a taxa de deformação é nula. Esse problema foi solucionado quando SODERBERG (1936)* propôs a seguinte equação empírica,

$$\dot{\epsilon} = c \left(e^{\frac{\sigma}{\sigma^+}} - 1 \right) \quad (6)$$

onde c e σ^+ são constantes dos materiais.

NADAI (1937)* propôs uma lei do tipo seno hiperbólico, também para corrigir o problema exposto anteriormente, expressão que foi sugerida originalmente por PRANDTL (1928)* e que descreve a taxa de deformação em função da variação na tensão:

$$\dot{\varepsilon} = d \cdot \sinh\left(\frac{\sigma}{\sigma^+}\right) \quad (7)$$

onde d e σ^+ são constantes que dependem do material. A equação (7) apresenta um comportamento quase linear para pequenos valores das tensões e não linear para grandes valores das tensões.

Segundo FEIJÓO, TAROCO e ZOUAIN (1982) a expressão de Norton tem uma vantagem do ponto de vista computacional, pois para $n = 0$ a equação (2) representa um estado de tensão elástico e para $n = \infty$ representa um estado de tensão correspondente a um material plástico ideal.

ODQVIST e HULT (1962) apresentaram diferentes equações constitutivas, formulações variacionais e métodos numéricos que permitem obter soluções de problemas onde o fenômeno do *creep* deve ser considerado.

HALBRITTER (1977) analisa em sua tese de doutorado estruturas com comportamento viscoelástico, e apresenta uma aplicação utilizando o método de Galerkin usando um tipo de integração aproximada no tempo, formulação que é incremental ou “passo a passo”. É apresentado um programa que é implementado utilizando elementos dos modelos mistos, híbridos e de deslocamentos onde são analisados problemas de estado plano, flexão de placas e cascas arbitrárias.

BOYLE (1979) apresenta em seu trabalho o método de tensão de referência em problemas de *creep*, considerando as leis de *creep* de Norton, Pradntl, Dom e Garofalo. Constam também nesse trabalho os parâmetros utilizados para as constantes de *creep* do aço inoxidável SS 304 593° C.

BATHE E SNYDER (1980) apresentam um esquema de solução levando em consideração os efeitos termoplásticos com fluência pelo Métodos dos Elementos Finitos, utilizando uma formulação Euleriana. Esse método foi implementado no programa computacional Adina.

FEIJÓO, TAROCO, GUERREIRO (1983) apresentam um trabalho intitulado

como Aspectos Fundamentais da Fluência em Metais, publicado pelo LCC/CNPq. Nesse trabalho são apresentadas as teorias de endurecimento por tempo transcorrido e por deformação. É analisado também o problema de *creep* para estado uniaxial e multiaxial, assim como é apresentada uma formulação variacional para problemas de *creep* no estágio secundário. Neste trabalho os autores mencionam a importância do assunto e citam os simpósios internacionais sobre *creep* organizados pela IUTAM (Int. Union of Theoretical and Applied Mechanics) na décadas de 60, 70 e 80.

HUDDLESTON (1985) apresenta um estudo para estado multiaxial de tensão considerando um critério de ruptura sob o fenômeno de *creep*, para aço inoxidáveis SS 304 593° C.

GUERREIRO (1988) apresenta em sua tese de doutorado, um formulação mista de Petrov-Galerkin, na construção de elementos finitos para problema de *creep* estacionário e em problemas de *creep* transiente. Nesse trabalho são discutidas a existência e unicidade de soluções para problemas contínuos e discretos. São apresentados algoritmos para solução dos dois problemas.

SESHADRI (1990) analisa estruturas sob um estado multiaxial de tensão, e considera o problema de dano para os segmentos da estrutura sujeitos a variação de estado de carregamento. Esse problema é determinado estudando a resposta da relaxação pelo diagrama de GLOSS (Generalized Local Stress Strain). Esse diagrama relaciona as tensões equivalentes e as deformações efetivas obtidas a partir de um histórico de carregamento.

SEVERUD (1991) desenvolveu trabalho sobre análise de *creep* e fadiga.

WANG e WANG (1994, a, b) apresentam artigos tendo o MEF como método para resolução de problemas de *creep* estacionário, utilizando a lei de Norton para implementação da solução numérica. O método de Newton Raphson é aplicado para solucionar a não linearidade em alguns exemplos para problemas bidimensionais.

MUNOZ (1993) também desenvolve, em sua tese de doutorado, uma

formulação utilizando MEF baseados no método de Petrov- Galerkin para problemas de *creep* estacionário e *creep* transiente. Neste trabalho são discutidas também a existência e unicidade das soluções, assim como é apresentado um algoritmo para a solução de problemas contínuos e discretos.

SARDON (1994) apresenta o desenvolvimento de um programa , empregando o MEF, para solução de problemas que envolvem análise elastoplástico com fluência ou *creep*. Nesse trabalho são levadas em consideração a não linearidade geométrica juntamente com a não linearidade física.

Nesse mesmo sentido destaca-se o trabalho desenvolvido por XUE e WANG (1995, a, b) que apresentam a forma variacional e uma formulação de elementos finitos acoplada a uma técnica de penalidades para análise de problemas de *creep* estacionário, em estado plano de tensão e estado plano de deformação. Alguns exemplos são apresentados, comparando-se os resultados obtidos por algumas leis de *creep* como Norton, Prandtl, Dorn e Garafolo. O método de Newton Raphson também é utilizado para solução da não linearidade. Esse é o trabalho que serviu como base para o desenvolvimento desta dissertação.

SHARIYAT E ESLAMI (1996), apresentam uma formulação isoparamétrica utilizando o Método dos Elementos Finitos para problemas termoelásticos e *creep* para cascas de revolução, propõem em seu trabalho um algoritmo de solução para investigar as variações de tensão.

CASSARA (1997) desenvolveu, em sua dissertação, uma formulação de um algoritmo para o cálculo de tensões através do MEF aplicado a análise elastoplástica , levando em conta os efeitos de *creep* em metais.

SANTOS (2001) apresenta um trabalho sobre análise estruturas aperticadas em concreto armado e protendido, levando em consideração os problemas de deformação lenta. Nesse trabalho são feitas análises de problemas de deformações lentas, retração e fissuração do concreto. É mostrado um algoritmo de integração de tensões em

viscoelasticidade do concreto.

1.3 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

Este trabalho está organizado em 6 capítulos, onde no Capítulo 1 foram apresentados alguns trabalhos desenvolvidos por diversos autores. Os demais capítulos são organizados da seguinte forma.

No Capítulo 2 são apresentadas as definições do problema de *creep*. Alguns modelos da viscoelasticidade são apresentados e discutidos, tais como modelos de Kelvin e Maxwell, modelos compostos e modelos generalizados.

No Capítulo 3 é apresentada uma forma de modelagem matemática para o fenômeno de *creep* estacionário, considerando um modelo uniaxial e posteriormente generalizando para o modelo multiaxial de tensões. São apresentadas também as teorias de Endurecimento Pelo Tempo Transcorrido (Time Hardening Theory) e Endurecimento por Deformação (Strain Hardening Theory).

O Capítulo 4 é destinado à apresentação da formulação do MEF. São abordados os princípios variacionais que envolvem o problema de *creep* estacionário. Também é apresentado o algoritmo empregado na implementação do processo iterativo, o Método de Newton Raphson.

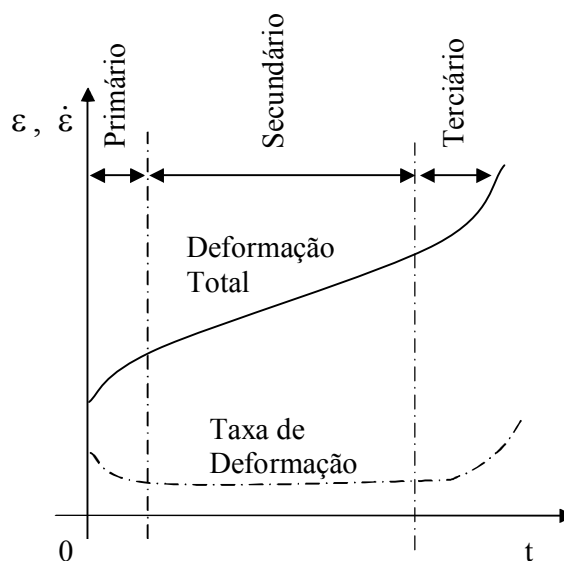
No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos e comparações com aqueles disponíveis nas literaturas citadas.

Por fim, o Capítulo 6, refere-se às conclusões obtidas a partir das verificações numéricas, e são apresentadas algumas sugestões para a continuidade desta pesquisa.

2- REVISÃO TEÓRICA DO FENÔMENO DE *CREEP*

O *creep* também designado por fluência, é um fenômeno que se manifesta na forma de uma deformação lenta e contínua que o material sofre quando submetido a um estado de tensão constante. Este fenômeno é acelerado com o aumento da tensão ou da temperatura e, em alguns casos, pode ser afetado pelo tempo, pela duração do carregamento e pelas condições de exposição. Para um caso onde a tensão e a temperatura são mantidas constantes, é apresentado a seguir um gráfico que mostra a variação das deformações e das taxas de deformações ao longo do tempo ilustrando o comportamento de um material sujeito ao *creep*.

FIGURA 2 - CURVA DE *CREEP*



Em geral, as curvas de *creep* para os diversos materiais sujeitos ao fenômeno são similares à que está representada na Figura 2.

Um ensaio típico de *creep* através do qual se estabelece uma relação entre a deformação uniaxial ϵ , a tensão σ e o tempo t , consiste em que, o corpo de prova seja

submetido a uma força de tração a uma temperatura constante e são registradas as deformações sofridas com o passar do tempo.

Existem diversos tipos de máquinas que permitem realizar este ensaio. Há máquinas que permitem ensaiar o corpo de prova controlando a deformação e ou a taxa de deformação, outras permitem ensaios a uma tensão controlada.

Pode-se notar que quando o corpo de prova sofre deformação longitudinal sua seção transversal diminui e a tensão aumenta apesar da carga ser constante. Nos primeiros anos de estudo da teoria de *creep* esse aspecto foi especialmente cuidado e foram desenvolvidos mecanismos para assegurar que a tensão permanecesse constante ANDRADE (1910).

Posteriormente, houve a comprovação de que a deformação se processa a volume constante: situação que é associada a uma condição de incompressibilidade. Pelo menos na primeira aproximação, passou-se simplesmente a controlar a modificação da área através da modificação do comprimento.

A deformação instantânea (ε_0), que ocorre imediatamente após aplicação da carga, incluem deformações elásticas e plásticas que somente são dependentes do nível de tensão (σ) aplicada.

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma) \quad (8)$$

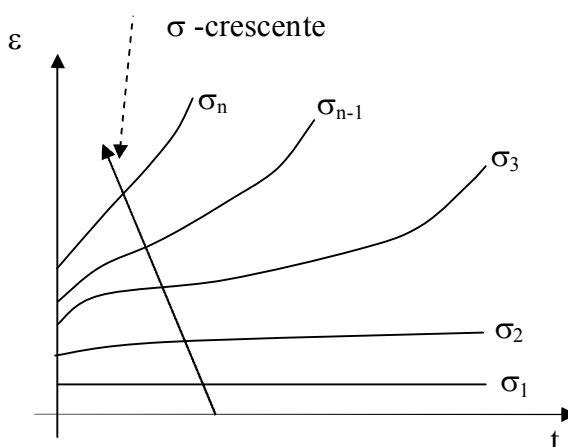
Observando-se a curva de fluência apresentada na Figura 2, podem-se distinguir três regiões com comportamentos diferentes. Inicialmente tem-se um processo transitório caracterizado por uma taxa de deformação decrescente. Em seguida apresenta-se uma região onde a taxa de deformação atinge um valor mínimo permanecendo constante. Verifica-se que para uma temperatura constante esta taxa de deformação ($\dot{\varepsilon}$) é função somente da tensão (σ):

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\sigma) \quad (9)$$

no último segmento da curva de *creep*, o material flui a uma taxa de deformação crescente até ocorrer a ruptura do corpo de prova. Cada uma destas regiões são conhecidas nas literaturas como: *creep* primário, secundário e terciário respectivamente. O *creep* secundário também é conhecido como *creep* estacionário.

A subdivisão das curvas de *creep* em três regiões é, de certa forma, convencional. Por exemplo: a parte linear, típica do processo de fluência estacionária, nem sempre está presente. Dependendo do valor da tensão a que o material está sujeito a curva de *creep* pode não atingir a fase estacionária. Esta fase pode ser omitida passando da primeira para a terceira fase diretamente. A parte secundária de *creep* fica reduzida a um ponto de inflexão na curva de *creep*. Na Figura 3, que apresenta um gráfico para níveis de tensão onde $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_{n-1} < \sigma_n$, pode-se observar o comportamento das diversas fases de *creep*.

FIGURA 3 - CURVAS DE *CREEP* PARA VARIAÇÕES DE TENSÃO A TEMPERATURA CONSTANTE



Considerando-se que para cada nível de tensão há uma deformação correspondente, é mais conveniente trabalhar com a taxa de deformação, do que com a deformação propriamente dita. Diversos autores propuseram expressões matemáticas

das mais variadas para se determinar a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(\sigma) \quad (10)$$

Algumas delas são baseadas em conceitos puramente empíricos, outras em fundamentação física. A seguir são apresentados alguns modelos reológicos. Estes modelos facilitam o entendimento do comportamento de alguns materiais e as formulações destas expressões matemáticas que modelam o problema de *creep*.

2.1 - MODELOS REOLÓGICOS PARA *CREEP*

O comportamento dos materiais viscoelásticos sob carregamento axial pode ser representado por modelos reológicos, que são capazes de representar de forma mais clara como as tensões e deformações mudam com o passar do tempo. Os modelos são basicamente representados por molas e amortecedores a fim de simular o comportamento do material quando sujeito a deformações de *creep*.

Primeiramente serão apresentados os modelos clássicos, o modelo para um sólido elástico e o modelo de um fluido viscoso, e posteriormente serão apresentados os modelos considerando materiais viscoelásticos, onde são misturados os modelos de forma a apresentar um melhor comportamento destes materiais.

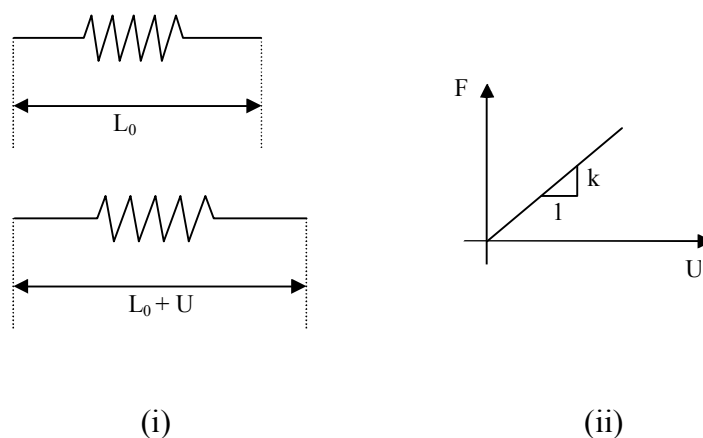
2.1.1 - COMPORTAMENTO DE UM SÓLIDO ELÁSTICO

O comportamento de um sólido elástico linear pode ser representado simplificadaamente por um modelo de mola. Através do modelo é possível representar a resposta do material quando submetido a um carregamento qualquer, como se vê na Figura 4 (i) e (ii). A constante da mola (k), representa o módulo de elasticidade do

material. Este modelo mostra a relação entre força (F) e deslocamento (U) , $F = k \cdot U$, podendo representar, dessa forma, a relação tensão e deformação da Elasticidade linear dada pela lei de Hooke, onde σ é a tensão, E o módulo de elasticidade do material e ε a deformação:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (11)$$

FIGURA 4 – MODELO DE MOLA

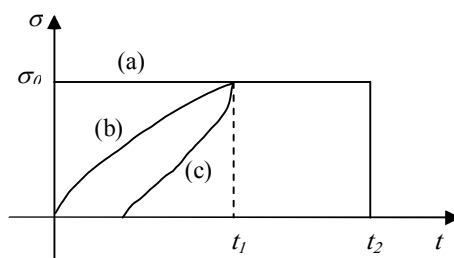


Observando a Figura 5, nota-se que no caso elástico, a deformação obtida no intervalo de tempo t_i , Figura 5 (ii), é a mesma considerando diversas formas de aplicação de tensão (a), (b) ou (c), Figura 5 (i). Pode-se observar que para o tempo t_i a deformação é mesma independente da história de carregamento sofrida pelo material. Este comportamento sugere que para cada valor de deformação existe uma única tensão correspondente. Esta relação de tensão deformação pode ser representada por:

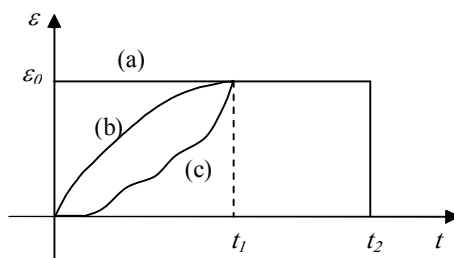
$$\sigma(t) = k \cdot \varepsilon(t) \quad (12)$$

onde k é a constante elástica do material e $k(t) = \text{cte}$.

FIGURA 5- GRÁFICO TENSÃO E DEFORMAÇÃO POR TEMPO, MATERIAL SÓLIDO ELÁSTICO



(i)



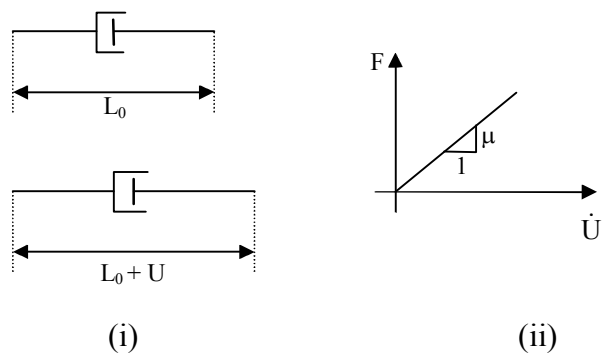
(ii)

2.1.2 - COMPORTAMENTO DE UM FLUIDO VISCOSO

O comportamento visco linear é apresentado de forma similar ao anterior, utilizando um sistema de amortecedor como se observa na Figura 6. A constante μ representa o coeficiente de viscosidade. A relação força *versus* taxa de deslocamento é estabelecida por $F = \mu \cdot \dot{U}$. De modo análogo ao caso anterior pode-se relacionar a tensão com a taxa de deformação, chegando-se a:

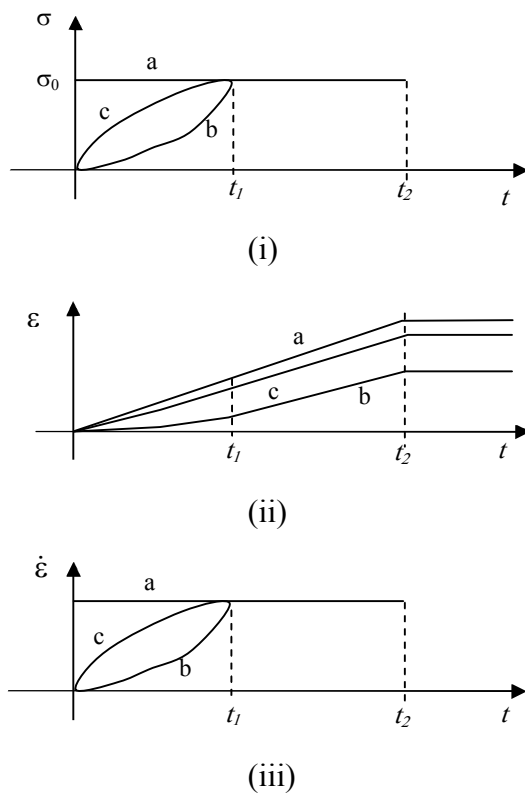
$$\sigma = \mu \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \mu \cdot \dot{\varepsilon} \quad (13)$$

FIGURA 6 - MODELO AMORTECEDOR



Se a tensão aumenta até σ_0 num tempo t_0 e é mantida constante, um fluido linear viscoso não atingirá um estado de deformação constante. Haverá uma deformação contínua com o tempo. Em outras palavras, o amortecedor sofrerá deformação contínua a uma taxa constante quando for submetido a um passo de tensão constante conforme a Figura 7 (i), como é o caso da carga (a).

FIGURA 7 – GRÁFICOS TENSÃO, DEFORMAÇÃO E TAXA DE DEFORMAÇÃO PELO TEMPO, MATERIAL VISCOSO



Supondo que se atinja a taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ no tempo t_l , através dos caminhos (a), (b) e (c) conforme a Figura 7, verifica-se que, para os diversos caminhos de tensão, a taxa de deformação no tempo t_l é a mesma. Observa-se também que as deformações no tempo t_l são diferentes. Pode-se concluir que a tensão não depende da deformação em t_l , nem do valor prévio da deformação. A tensão depende somente da taxa de deformação no tempo t_l . Esta relação entre tensão e taxa de deformação pode ser representada por:

$$\sigma(t) = \mu \cdot \dot{\epsilon}(t) \quad (14)$$

Verifica-se que, para materiais que apresentam comportamento viscoelástico, a melhor forma de se representar a resposta das deformações é fazendo uma combinação do modelo elástico (mola) com o modelo viscoso (amortecedor). Dentre os modelos encontrados na literatura, serão apresentados a seguir os modelos de Maxwell e Kelvin, e os modelos compostos que são combinações entre os modelos Maxwell e Kelvin.

2.1.4 - MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell é constituído por um elemento de mola acoplado ao amortecedor em série, conforme a Figura 8 (i). As relações entre tensão e deformação são definidas pelas equações abaixo.

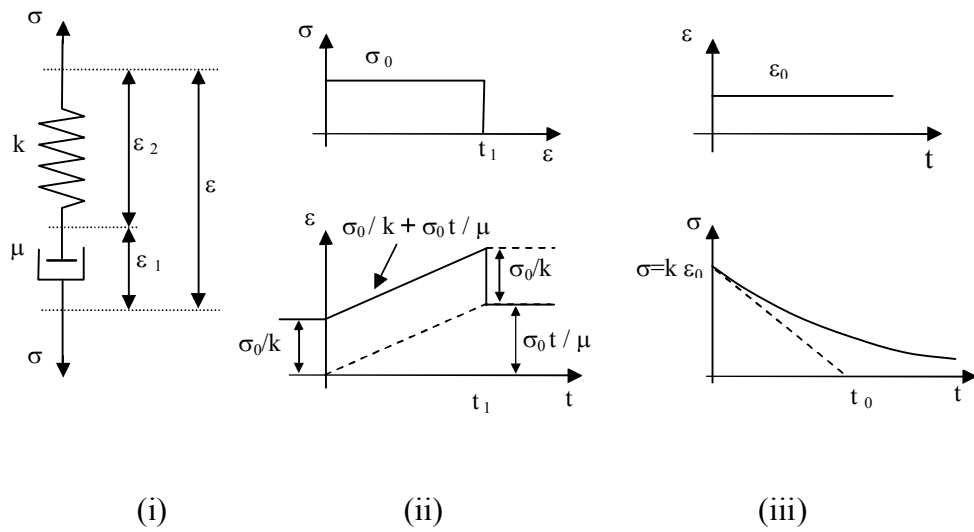
a- Equação constitutiva da mola:

$$\sigma_k = k \cdot \epsilon_2 \quad (15)$$

b- Equação constitutiva do amortecedor:

$$\sigma_\mu = \mu \cdot \dot{\epsilon}_1 \quad (16)$$

FIGURA 8 – MODELO DE MAXWELL



Como os elementos são conectados em série, então, a deformação total é dada por:

$$\epsilon = \epsilon_k + \epsilon_\mu \quad (17)$$

e a taxa de deformação é dada por:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_k + \dot{\epsilon}_\mu \quad (18)$$

Derivando a equação (15) em relação ao tempo e considerando a equação (16) pode-se escrever (18) como:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{k} + \frac{\sigma}{\mu} \quad (19)$$

Observando a equação (19), nota-se que se a mola for rígida $k = \infty$, o modelo se reduz ao fluido Newtoniano. Da mesma forma se o amortecedor se tornar rígido $\mu = \infty$, o modelo se reduz a uma mola. Resolvendo a equação diferencial (19) pode-se obter resposta do modelo de Maxwell a vários tipos padronizados de tensão ou deformação dependentes do tempo.

Por exemplo, considerando $\sigma = \sigma_0$ e $t = t_0$ como condições iniciais para a equação (19), obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sigma_0}{\mu} t \quad (20)$$

Isto pode ser visto na Figura 8 (ii). O modelo de Maxwell prevê que há um aumento ilimitado da deformação. Isto é uma característica de muitos fluidos, por isso os materiais que podem ser descritos pela equação (20) são conhecidos como fluidos de Maxwell. Se houver descarregamento no tempo t_1 observa-se uma recuperação da deformação da mola enquanto que a deformação no amortecedor permanece.

Se uma deformação ε_0 for mantida constante ao longo do tempo, observa-se uma relaxação na tensão, Figura 8 (iii), e pela solução da equação diferencial (19) a tensão fica:

$$\sigma(t) = k\varepsilon_0 e^{-\frac{k t}{\mu}} \quad (21)$$

A equação (21) descreve a relaxação da tensão para o modelo de Maxwell quando o material é submetido a uma deformação constante.

2.1.5 – MODELO DE KELVIN

O modelo de Kelvin é apresentado na Figura 9, onde o elemento de mola é ligado ao elemento de amortecedor em paralelo. A mola e o amortecedor têm a relação tensão deformação apresentada por:

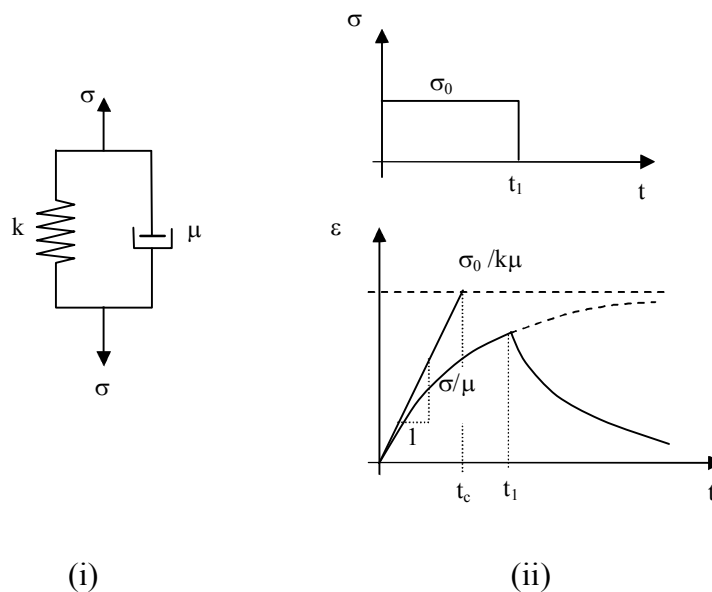
a- Equação constitutiva da mola:

$$\sigma_k = k\varepsilon \quad (22)$$

b- Equação constitutiva do amortecedor:

$$\sigma_\mu = \mu\dot{\varepsilon} \quad (23)$$

FIGURA 9 – MODELO DE KELVIN



Como os elementos são conectados em paralelo, então as relações das tensões e das deformações são dadas por:

$$\sigma = \sigma_k + \sigma_\mu \quad (24)$$

A equação (24) pode ser rescrita como

$$\sigma(t) = k\varepsilon(t) + \mu\dot{\varepsilon}(t) \quad (25)$$

Resolvendo a equação (25) obtém-se uma forma para o *creep* sob um estado de tensão constante σ_0 para o tempo $t_0 = 0$.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k t}{\mu}} \right) \quad (26)$$

Observando a Figura 9 nota-se que quando o tempo tende a infinito a deformação cresce a uma taxa decrescente a um valor assintótico $\frac{\sigma_0}{k}$. A resposta da deformação do modelo para uma aplicação abrupta da tensão, é que no primeiro instante, a tensão é suportada pelo amortecedor. Sob um estado de tensão o amortecedor se alonga e transfere gradativamente a força para o elemento de mola, até finalmente a tensão ser transferida totalmente sobre a mola.

A taxa de deformação para o modelo de Kelvin sob tensão constante é dada por:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\mu} e^{-\frac{k t}{\mu}} \quad (27)$$

Nesse modelo tem-se que a deformação total é a soma de três parcelas:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (28)$$

ou ainda

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 \quad (29)$$

onde, ε_1 é a deformação da mola com constante de rigidez k_1

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{k_1} \quad (30)$$

ε_2 é a deformação do amortecedor com coeficiente de viscosidade μ_1 , que pode ser avaliada em função da taxa $\dot{\varepsilon}_2$:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\sigma}{\mu_1} \quad (31)$$

Finalmente, $\dot{\varepsilon}_3$ é a taxa de deformação segundo o modelo de Kelvin, determinada a partir da equação (25).

$$\dot{\varepsilon}_3 + \varepsilon_3 \frac{k_2}{\mu_2} = \frac{\sigma}{\mu_2} \quad (32)$$

Observa-se que o comportamento do *creep* proposto neste modelo é a soma dos modelos de Maxwell e Kelvin. Portanto sobrepondo-se as equações (20) e (26), obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k_1} + \frac{\sigma_0}{\mu_1} t + \frac{\sigma_0}{k_2} \left(1 - e^{-\frac{k_2 t}{\mu_2}} \right) \quad (33)$$

A primeira parcela da equação (33), em termos de k_1 e μ_1 , corresponde ao modelo de Maxwell e a segunda parcela, em termos de k_2 e μ_2 , corresponde modelo de Kelvin.

Diferenciando-se a equação (33) obtém-se a taxa de deformação de creep:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\mu_1} + \frac{\sigma_0}{\mu_2} e^{-\frac{k_2 t}{\mu_2}} \quad (34)$$

A taxa de *creep* inicia-se num tempo t próximo de zero $t = 0^+$, então:

$$\dot{\varepsilon}(0^+) = \frac{\sigma_0}{\mu_1} + \frac{\sigma_0}{\mu_2} = tg(\theta) \quad (35)$$

e a resposta para um tempo infinito $t = \infty$ é:

$$\dot{\varepsilon}(\infty) = \frac{\sigma_0}{\mu_1} = tg(\phi) \quad (36)$$

onde θ e ϕ são as inclinações da reta tangente tal como pode ser observado na Figura 10 (ii).

Se a tensão σ_0 for retirada no tempo t_1 , a deformação segundo o modelo composto para um tempo t maior que t_1 é dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\mu_1} t_1 + \frac{\sigma_0}{k_2} \left(e^{-\frac{k_2 t_1}{\mu_2}} - 1 \right) e^{-\frac{k_2 t}{\mu_2}} \quad (37)$$

Observando-se a equação (37) juntamente com a Figura 10 (ii) pode-se notar que a recuperação da deformação é dada inicialmente pela recuperação elástica, seguida da recuperação da deformação de *creep* a uma taxa decrescente. O segundo termo da equação (37) tende a zero, enquanto o primeiro termo representa a deformação permanente.

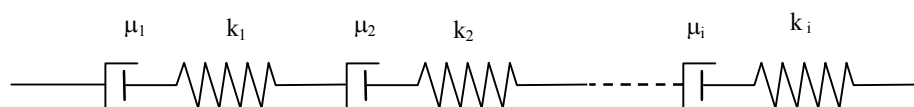
2.1.7 - MODELOS GENERALIZADOS

Os comportamentos dos materiais viscoelásticos podem ser representados por modelos que combinam molas e amortecedores em série ou em paralelo, alguns modelos serão apresentados a seguir.

2.1.7.1 - MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO

Acoplando-se alguns modelos de Maxwell em série conforme Figura 11 ou em paralelo tal como a Figura 12, formam-se os modelos generalizados com respostas diferentes para o comportamento do material.

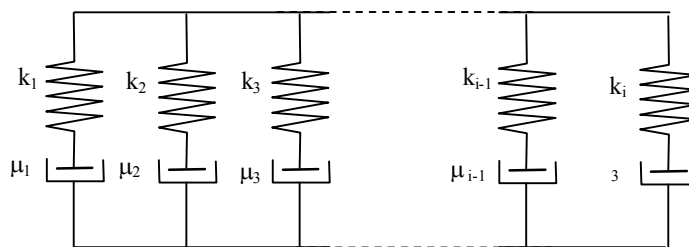
FIGURA 11 – MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM SÉRIE



A equação constitutiva para o caso em série e dada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} + \sigma(t) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu_i}. \quad (38)$$

FIGURA 12 – MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM PARALELO



A equação constitutiva para o caso em paralelo é diferente da anterior, pois a deformação em cada unidade é dada por:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{k_i} + \frac{\sigma(t)}{\mu_i} \quad (39)$$

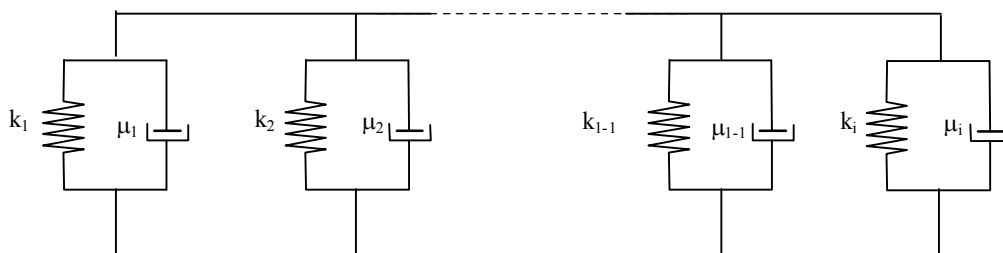
que é equivalente a equação (3.9), onde em um ensaio de *creep* chega-se a:

$$\dot{\varepsilon}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{k_i} + \frac{\sigma_0}{\mu_i} t \quad (40)$$

2.1.7.2 - MODELO DE KELVIN GENERALIZADO

Da mesma forma que o modelo de Maxwell, o modelo de Kelvin também aparece nas configurações paralelo conforme a Figura 13, e em série tal como a Figura 14 a seguir.

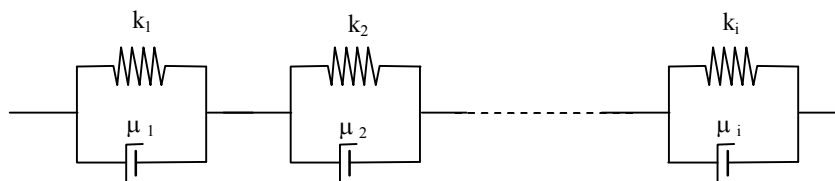
FIGURA 13 – MODELO DE KELVIN GENERALIZADO EM PARALELO



A equação constitutiva para o modelo de Kelvin em paralelo é dada por:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n k_i + \dot{\varepsilon}(t) \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (41)$$

FIGURA 14 – MODELO DE KELVIN GENERALIZADO EM SÉRIE



Onde a tensão em cada unidade é dada por:

$$\sigma_i(t) = k_i \varepsilon_i(t) + \mu_i \dot{\varepsilon}_i(t) \quad (42)$$

e a deformação para o modelo generalizado é determinada por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0}{k_i} \left(1 - e^{-\frac{k_i t}{\mu_i}} \right) \quad (43)$$

O modelo generalizado de Kelvin em série é mais conveniente do que o modelo generalizado de Maxwell para materiais viscoelásticos onde há histórias de tensões prescritas. Entretanto, o modelo de Maxwell é mais conveniente para casos onde há histórias de deformações prescritas. Em função dos diferentes tempos de relaxação que estes modelos apresentam, ambos permitem uma descrição mais realista do comportamento do material ao longo do tempo do que os modelos mais simples.

Para modelar os materiais que apresentam comportamento viscoelástico, é conveniente tomar valores limites para as constantes da mola ou do amortecedor. Deve-se notar que tanto o modelo de Maxwell com constante da mola infinita quanto o modelo de Kelvin com a constante da mola igual a zero, correspondem a um caso simples de um amortecedor. Ao contrário, o modelo de Maxwell com viscosidade infinita ou o modelo de Kelvin com viscosidade igual a zero resultam num elemento mola.

3- MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O FENÔMENO DE *CREEP*

Neste capítulo é apresentada a formulação matemática para o problema de *creep* estacionário no estado uniaxial de tensões que, em seguida, será generalizada para um estado multiaxial de tensões.

3.1- *CREEP* SOB ESTADO UNIAXIAL DE TENSÃO

O fenômeno de *creep* para o estado uniaxial de tensões pode ser representado por uma equação geral do tipo:

$$\varepsilon^c = f(\sigma)g(t)h(T) \quad (44)$$

onde ε^c é a deformação de *creep* e f , g , h são funções expressas em termos de tensão (σ), tempo (t) e temperatura (T) respectivamente. Estas expressões matemáticas apresentam-se na literatura de várias maneiras e são capazes de representar com alguma exatidão os resultados obtidos de forma experimental.

São apresentadas a seguir algumas destas equações, [Boyle (1983)].

a- Equações em função da tensão:

$$\text{Norton} \quad f(\sigma_e) = b\sigma_e^n \quad (45)$$

$$\text{Prandtl} \quad f(\sigma_e) = C \sinh(\alpha\sigma_e) \quad (46)$$

$$\text{Dorn} \quad f(\sigma_e) = d \exp(\beta\sigma_e) \quad (47)$$

$$\text{Garafolo} \quad f(\sigma_e) = A[\sinh(\gamma\sigma_e)]^n \quad (48)$$

$$\text{Friction stress } f(\sigma_e) = b(\sigma_e - \sigma_0)^n \quad (49)$$

b- Equações em função do tempo:

$$\text{Secondary Creep } g(t) = t \quad (50)$$

$$\text{Bailey } g(t) = At^n \quad (51)$$

$$\text{Andrade } g(t) = \left(1 + bt^{1/3}\right) e^{\phi t} \quad (52)$$

$$\text{Graham e Walles } g(t) = \sum_j a_j t^{m_j} \quad (53)$$

c- Equação em função da temperatura de acordo com a lei de Arrhenius:

$$h(T) = A \exp\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right) \quad (54)$$

onde ΔH é a energia de ativação, R constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta.

No entanto deve-se levar em consideração dois aspectos: o primeiro, a equação (44) só contempla os casos em que a temperatura e a tensão permanecem constantes, e o segundo para a análise de problemas que envolvem variações na tensão e temperatura.

Segundo KRAUS (1980), existem dois caminhos a seguir:

a- A resposta do material depende somente do estado em que o corpo se encontra;

- b- A resposta do material depende explicitamente da história, ou seja, do processo de carregamento, temperatura, deformação a que o corpo foi submetido.

O primeiro caminho conduz a relações constitutivas do tipo equações de estado. O segundo é conhecido na literatura como “material com memória”. Devido ao fato de existirem poucas informações experimentais quanto aos materiais com memória, muitos trabalhos têm sido desenvolvidos para a determinação das aproximações que envolvem equações de estado, pois apresentam as seguintes vantagens:

- a- Têm sido intensamente aplicadas, dispondo de uma grande quantidade de resultados experimentais que permitem avaliar o grau de confiabilidade dos resultados.
- b- São, em geral, expressões mais simples, de fácil manipulação computacional e, em virtude de uma analogia com problemas de elasticidade, são facilmente incorporados aos programas automáticos de cálculo já existentes.
- c- Os parâmetros dos materiais que intervêm nestas equações são obtidos por meio de ensaios.

Por outro lado, o desenvolvimento de equações constitutivas capazes de incluir os casos de variações do estado de tensão é um processo muito complicado. Parte desta dificuldade se dá porque a maioria dos resultados experimentais existentes foram obtidos em condições de temperaturas constantes.

Isto implica que a maioria das equações constitutivas têm sido propostas em bases de generalizações das equações de *creep* para tensão constante.

Dado que estas generalizações são por si mesmas ilimitadas em número, daí decorrem numa grande quantidade de teorias para uma mesma história de

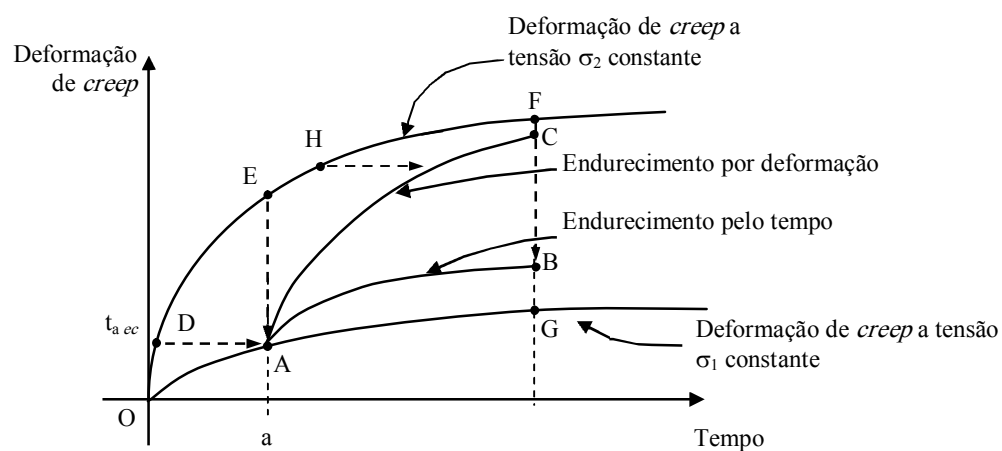
carregamento, muitas delas apresentando resultados diferentes entre si.

A seguir são apresentadas duas das teorias utilizadas para problemas uniaxiais.

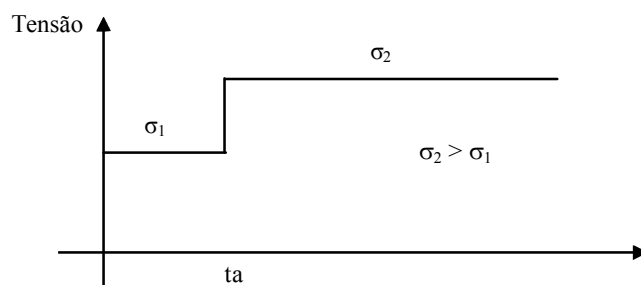
3.1.1 - Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido (Time Hardening Theory)

A Figura 15 apresenta esquematicamente a diferença entre as teorias utilizadas para o problema de *creep* uniaxial.

FIGURA 15 - TEORIAS DE ENDURECIMENTO POR TEMPO TRANSCORRIDO OU POR DEFORMAÇÃO



(i)



(ii)

Considere-se a equação constitutiva de *creep* a uma tensão (σ) e uma

temperatura (T) constante.

$$\varepsilon^c = f(\sigma)g(t)h(T) \quad (55)$$

Derivando-se a equação (55), obtém-se a taxa de deformação de *creep*, que é dada por:

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma)\frac{dg(t)}{dt}h(T) \quad (56)$$

A Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido, conhecida na literatura com “Time Hardening Theory”, consiste em se estabelecer que para cada caso de variação de tensão, a taxa de deformação de *creep* é dada por uma nova expressão similar a equação (56), como segue:

$$\dot{\varepsilon}^c = F(\sigma)G(t)H(T) \quad (57)$$

Tomando-se o caso particular da lei de Bailey-Norton

$$\varepsilon^c = A\sigma^m t^n \quad (58)$$

onde A , m e n são constantes que dependem do material e da temperatura, tem-se por essa a expressão:

$$\dot{\varepsilon}^c = \frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = A\sigma^m n t^{n-1} \quad (59)$$

Observando a Figura 15 (i), nota-se que para as tensões σ_1 e σ_2 existem

respostas diferentes para as deformações de *creep*. O segmento OG refere-se a resposta para tensão σ_1 e o segmento OF para a tensão σ_2 aplicadas desde o tempo t_0 .

De acordo com Teoria de Endurecimento Pelo Tempo Transcorrido, para o nível de tensão σ_1 a resposta segue num tramo OA da curva, correspondente as deformações ocorridas devido a este nível de tensão. Quando a tensão passa para o valor σ_2 no instante t_a , a resposta da deformação no segmento AB, corresponde a um deslocamento vertical do segmento EF, para o ponto A. Observa-se que há uma mudança da taxa de variação da deformação do segmento OA para o segmento AB correspondente a mudança de tensão.

3.1.2- Teoria de Endurecimento por Deformação (Strain Hardening Theory)

A Teoria de Endurecimento por Deformação estabelece que a taxa de deformação de *creep* passa a ser uma função do estado em que se encontra o corpo, dependente do estado de tensão, temperatura e deformação de *creep* acumulada:

$$\dot{\epsilon}^c = F(\sigma) \cdot G(\epsilon^c) \cdot H(T) \quad (60)$$

Uma vez que a taxa de deformação de *creep* depende explicitamente da deformação, essa teoria é conhecida como Teoria de Endurecimento por Deformação ou “Strain Hardening Theory”.

Tomando-se o caso particular da lei de Bailey-Norton

$$\epsilon^c = A\sigma^m t^n \quad (61)$$

Tem-se por essa teoria que

$$t = \left(\frac{\varepsilon^c}{A\sigma^m} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (62)$$

então,

$$\dot{\varepsilon}^c = A \frac{1}{n} \sigma^{\frac{m}{n}} \left(\varepsilon^c \right)^{\frac{(n-1)}{n}} \quad (63)$$

Para essa teoria a resposta apresentada na Figura 15 é diferente da teoria de endurecimento por tempo. Quando a tensão passa de σ_1 para σ_2 no instante t_a , a resposta da teoria por deformação no segmento AC, é obtido trasladando horizontalmente o segmento DH para o ponto A.

Segundo BATHE (1996) a Teoria de Endurecimento por Deformação apresenta melhores resultados para variação nas condições de tensões. FEIJÓO, TAROCO E GUERREIRO (1983) ressaltam que, em geral, os ensaios realizados com programas de carga variável mostram que a Teoria de Endurecimento por Deformação se comporta melhor do que a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido. Entretanto é interessante destacar que a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido tem sido amplamente usada em virtude de certas simplificações matemáticas implícitas nesta formulação.

Nas subseções anteriores foram apresentadas as equações constitutivas uniaxiais segundo as teorias de endurecimento por tempo transcorrido e por deformação. Da forma em que estas teorias foram apresentadas, mostrou-se que sua aplicação está restrita a problemas em que o estado tensão sofre pouca variação.

Estas equações não contemplam problemas que envolvem cargas ou descargas alternadas, onde deve-se levar em consideração os fenômenos de recuperação e relaxação.

Será feito, a seguir, uma extensão dessas teorias para o estado multiaxial de tensões.

3.2 CREEP SOB ESTADO MULTIAXIAL DE TENSÃO

Ao se analisar um sólido sob condições multiaxiais de tensões, deve-se levar em consideração alguns requisitos do ponto de vista do fenômeno de *creep*. Assim como na plasticidade, tais considerações são parcialmente comprovadas experimentalmente. O presente trabalho será restrito ao caso da fluência estacionária isotrópica. Nessa condição, deverão ser válidas as seguintes observações:

- a- A formulação multiaxial deve ser reduzida a uma correta formulação uniaxial quando for requerido;
- b- O modelo deve expressar a constância de volume que foi observado experimentalmente durante o processo de fluência, ou seja, o traço do tensor taxa de deformações deve ser nulo. Tal restrição é associada muitas vezes a uma condição de incompressibilidade considerando pequenas deformações;
- c- As equações constitutivas devem refletir a perda de influência das tensões hidrostáticas que foi observado experimentalmente para fluência;
- d- Para materiais isotrópicos, as direções principais de tensões e deformações devem coincidir.

Observando-se a Figura 3 nota-se que um nível de deformação pode ser alcançado mais ou menos rapidamente por uma única tensão constante, ou por um programa de variação de tensões. Isto significa que as deformações por fluência dependem do histórico de tensões. Nessas condições as deformações de *creep* são

expressas em termos de taxas. As deformações decorrentes do *creep*, assim como na plasticidade, não são afetadas pelas pressões hidrostáticas sendo possível avaliá-las somente em termos do tensor desviador de tensões, conforme mostra a equação a seguir:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \zeta S_{ij} \quad i,j= 1,2,3 \quad (64)$$

sendo ζ é um fator de proporcionalidade e S_{ij} é o tensor desviador de tensões. Este tensor pode ser determinado conforme a equação (65)

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (65)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, sendo $\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy, dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (66)$$

A equação (64) satisfaz ao terceiro requisito (c), devido ao uso do tensor desviador de tensões que expressa a independência das tensões hidrostáticas, mas também ao quarto requisito, já que as componentes de tensão e de deformação são colineares. Esta equação é denominada de “regra de fluxo” em analogia ao caso de plasticidade e foi proposta por Prandtl e Reuss [KRAUS, 1980].

Na seqüência, determina-se o fator de proporcionalidade λ apresentado na equação (64). Primeiramente, define-se a tensão equivalente de von Mises:

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} \quad (67)$$

sendo que J_2 é o segundo invariante do tensor desviador de tensões, que vale:

$$J_2 = \frac{S_{ij}S_{ij}}{2} \quad (68)$$

Da mesma forma, pode-se definir a taxa de deformação efetiva de *creep*:

$$\dot{\epsilon}_e^c = \sqrt{\frac{4}{3}I_2} \quad (69)$$

$$I_2 = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c}{2} \quad (70)$$

onde I_2 é o segundo invariante do tensor taxa de deformação.

Segundo KRAUS (1980) σ_e e $\dot{\epsilon}_e^c$ também podem ser escritos como:

$$\sigma_e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) \right]^{1/2} \quad (71)$$

$$\dot{\epsilon}_e^c = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left\{ (\dot{\epsilon}_{11}^c - \dot{\epsilon}_{22}^c)^2 + (\dot{\epsilon}_{22}^c - \dot{\epsilon}_{33}^c)^2 + (\dot{\epsilon}_{33}^c - \dot{\epsilon}_{11}^c)^2 + 6 \left[(\dot{\epsilon}_{12}^c)^2 + (\dot{\epsilon}_{13}^c)^2 + (\dot{\epsilon}_{23}^c)^2 \right] \right\}^{1/2} \quad (72)$$

Substituindo-se a lei de *creep* apresentada na equação (64) em (72) para uma taxa de deformação efetiva de *creep* e observando a equação (67) para uma tensão efetiva encontra-se:

$$\zeta = \frac{3}{2\sigma_e} \frac{d\dot{\epsilon}_e^c}{dt} \quad (73)$$

Esta quantidade é obtida experimentalmente a partir de um ensaio de tensão uniaxial. Para satisfazer o primeiro requisito (a) para os casos multiaxiais observa-se o uso de quantidades efetivas, ou seja, a formulação multiaxial pode ser reduzida a uma formulação uniaxial. Considerando um caso uniaxial onde $\sigma_{11} \neq 0$ as demais tensões sejam iguais a zero, a equação (67) reduz-se a $\sigma_e = \sigma_{11}$. Além disso, em um caso uniaxial $\dot{\epsilon}_{11}^c \neq 0$, $\dot{\epsilon}_{22}^c = \dot{\epsilon}_{33}^c$, e considerando a constância de volume, quesito (b) no problema de *creep*, então: (condição de incompressibilidade)

$$\dot{\epsilon}_{11}^c + \dot{\epsilon}_{22}^c + \dot{\epsilon}_{33}^c = 0 \quad (74)$$

$$\dot{\epsilon}_{22}^c = \dot{\epsilon}_{33}^c = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{11}^c \quad (75)$$

Substituindo-se a equação (75) em (72) chega-se:

$$\dot{\epsilon}_e^c = \dot{\epsilon}_{11}^c \quad (76)$$

Considerando-se a equação (64) e substituindo-se em (74) os termos acima, obtém-se:

$$\dot{\epsilon}_{11}^c + \dot{\epsilon}_{22}^c + \dot{\epsilon}_{33}^c = \zeta (S_{11} + S_{22} + S_{33}) = 0 \quad (77)$$

Tomando-se a lei de Bailey-Norton, equação (58), e estendendo-a para um caso multiaxial obtém-se:

$$\varepsilon_e^c = A \sigma_e^m t^n \quad (78)$$

então,

$$\zeta = \frac{3}{2\sigma_e} \frac{d\varepsilon_e^c}{dt} = \frac{3}{2} A n \sigma_e^{m-1} t^{n-1} \quad (79)$$

Pode-se, desta forma, expressar a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} S_{ij} A n \sigma_e^{m-1} t^{n-1} \quad (80)$$

Da mesma forma a Teoria de Endurecimento por Deformação como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} S_{ij} A \frac{1}{n} n \sigma_e^{\left(\frac{m}{n}-1\right)} \left(\varepsilon_e^c\right)^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \quad (81)$$

4 – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA PARA SOLUÇÃO DO FENÔMENO DE *CREEP*

4.1 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em uma técnica para solução aproximada de sistemas contínuos, onde o corpo em análise é discretizado num número finito de partes, denominados de elementos, que são conectados entre si através de pontos ou nós. A formulação do comportamento do elemento é feita com base em princípios energéticos da Mecânica do Contínuo, que resultam em relações entre forças e deslocamentos para cada elemento.

O MEF tem sua formulação baseada nos métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin. O método de Ritz é um dos mais conhecidos dentre os métodos variacionais para obtenção de soluções aproximadas. Nesse método as funções que fornecem a solução do problema são substituídas por funções aproximadoras. Procura-se uma função, dentre todas as funções admissíveis, que minimize um determinado funcional. A escolha adequada para estas funções é importante para se obter uma boa aproximação para solução do problema.

Dentre os métodos de resíduos ponderados, o método de Galerkin é o mais conhecido. Nesse método os fatores de ponderação utilizados são as próprias funções empregadas para definir as funções de aproximação.

Ambos os métodos utilizam funções aproximadoras, que devem satisfazer as condições de contorno, para resolver o sistema de equações diferenciais.

Particularizando o MEF para problemas que são baseados em deslocamentos, essas funções aproximadoras são escritas em função das componentes de deslocamentos nodais do elemento finito.

A seguir será descrita, de forma sucinta, a formulação do elemento

isoparamétrico quadrilateral para solução de problemas bidimensionais. As considerações são baseadas em literaturas sobre o MEF, como por exemplo: BATHE (1996), ZIENKIEWICZ (1980), COOK (1988), GRANDIN (1986) e outros.

4.2 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO BIDIMENSIONAL

Para avaliar o campo de deslocamento num problema plano, é proposta a seguinte interpolação:

$$u = NU \quad (82)$$

u são os deslocamentos num ponto genérico, U são as componentes de deslocamento nodais, N a matriz de funções de interpolação.

As componentes de deformação são dadas por:

$$\varepsilon = \Delta u \quad (83)$$

onde Δ é o operador diferencial aplicado, $\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$.

Então para o caso de pequenas deformações, pode-se escrever as componentes do tensor de deformação correspondente ao problema plano como sendo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (84)$$

ou ainda, em termos dos deslocamentos nodais,

$$\varepsilon = BU \quad (85)$$

sendo B a matriz dos operadores diferenciais indicados na equação (83), mas aplicado sobre os deslocamentos nodais.

A relação constitutiva entre tensão e deformação é dada por:

$$\sigma = D_e \varepsilon \quad (86)$$

onde D_e é a matriz que contém os parâmetros elásticos do material. Essa matriz é determinada conforme o problema proposto e, no caso bidimensional, pode estar relacionada ao estado plano de tensão, estado plano de deformação ou estado axissimétrico de tensões, que são descritas a seguir.

Para problema de estado plano de tensão, tal matriz fica:

$$D_e = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (87)$$

Para problema de estado plano de deformação:

$$D_e = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Para problema de axissimétrico de tensão:

$$D_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Pelo princípio dos Trabalhos Virtuais, que pode ser enunciado como: Se um corpo está em equilíbrio, então, o trabalho virtual das forças externas tem que ser igual ao trabalho virtual das forças internas. Tem-se então:

$$\delta W_e - \delta W_i = 0 \quad (90)$$

para todo deslocamento virtual δu .

$$\int_V (D_e \Delta u) \cdot \Delta \delta u dV + \int_S \bar{T} \cdot \delta u dS + \int_V \bar{b} \cdot \delta u dV = 0 \quad (91)$$

A partir da primeira integral da equação (91) obtém-se a matriz de rigidez do elemento, denominada $[K_e]$, a segunda integral está associado ao vetor forças de superfície e a última integral está associada ao vetor força de corpo.

Reescrevendo o primeiro termo em termos de deslocamentos nodais:

$$\int_V (D_e \Delta u) \cdot \Delta \delta u dV = (\delta U)^T r \int_S B^T D_e B dx dy U = (\delta U)^T K_e U \quad (92)$$

onde,

$$K_e = r \int_S B^T D_e B dx dy \quad (93)$$

onde V é o volume do corpo, S o contorno, r a espessura.

No caso de um elemento isoparamétrico, deve-se relacionar as coordenadas de um ponto genérico do elemento com as coordenadas nodais do elemento padrão. Isto se dá pelo uso do Jacobiano.

Seja J a matriz jacobiana, tal que:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (94)$$

O Jacobiano é o determinante da matriz J , $jac = \det J$.

Então a matriz de rigidez para o elemento isoparamétrico proposto, é:

$$K_e = r \int_S B^T D_e B dx dy = r \int_S B^T D_e B \det J d\xi d\eta \quad (95)$$

Designando por K a matriz de rigidez global e F_e o vetor de forças externas global, tem-se:

$$K_e u = F_e \quad (96)$$

A resolução deste sistema fornece os deslocamentos nodais que, através da equação constitutiva, permite determinar as tensões em cada nó do elemento.

4.3- PRINCIPIOS VARIACIONAIS DE *CREEP* ESTACIONÁRIO

Para o problema de *creep* em regime transiente de carregamento, a taxa de deformação total é dada pela soma da taxa de deformação elástica mais a taxa de deformação de *creep*. Para o problema de *creep* em regime permanente de carregamento, considera-se a taxa de deformação elástica $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ nula.

Assim para o regime permanente de carregamento o tensor a taxa de deformação $\dot{\epsilon}_{ij}$ pode ser escrito somente em função da taxa de deformação de *creep*, com os índices i e j variando de 1 a 3.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = 0 \quad (97)$$

Logo

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^c = \dot{\epsilon}_{ij}^c \quad (98)$$

Considerando a taxa efetiva de deformação $\dot{\epsilon}_e$ e a tensão equivalente de von Mises σ_e , a relação uniaxial constitutiva para o *creep* estacionário pode ser escrita como

$$\dot{\epsilon}_e = f(\sigma_e) \quad (99)$$

ou

$$\sigma_e = f^{-1}(\dot{\epsilon}_e) \quad (100)$$

Os valores de σ_e e $\dot{\epsilon}_e$ são obtidos conforme as equações (67) e (69) anteriormente apresentadas no capítulo 3.

Algumas sugestões para as funções de tensão são apresentadas nas equações (45) a (48).

Sob um estado multiaxial de tensões, as leis constitutivas tornam-se:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{f(\sigma_e)}{\sigma_e} S_{ij} \quad (101)$$

ou

$$S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{f^{-1}(\dot{\epsilon}_e)}{\dot{\epsilon}_e} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (102)$$

Assumindo-se que as funções f e f^{-1} são funções potenciais, existem então funções $\Omega(\sigma_e) > 0$ e $W(\dot{\epsilon}_e) > 0$ tais que:

$$f(\sigma_e) = \frac{d\Omega}{d\sigma_e} \quad (103)$$

$$f^{-1}(\dot{\epsilon}_e) = \frac{dW}{d\dot{\epsilon}_e} \quad (104)$$

De maneira análoga ao teorema de mínima energia potencial em elasticidade, existe um teorema de mínima energia potencial de dissipação para o problema de *creep* estacionário [BOYLE (1983) e KRAUS (1980)]. Dentre todas as soluções cinematicamente admissíveis \dot{u}_i^L e $\dot{\epsilon}_{ij}^L$ que são compatíveis com a taxa de deslocamento \dot{u}_i^L num instante L , e que se igualam às taxas de deslocamentos

prescritas no contorno S , deve-se encontrar uma taxa de deslocamento atual \dot{u}_i e uma taxa de deformação $\dot{\varepsilon}_{ij}$ que minimizem o funcional:

$$\Pi_p(\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) = \int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij}^L) dV - \int_V \bar{b}_i \dot{u}_i^L dV - \int_S \bar{T}_i \dot{u}_i^L dS \quad (105)$$

sujeito a condição de incompressibilidade $\dot{u}_{i,i}^L = \dot{\varepsilon}_{ii}^L = 0$ onde \bar{b} é o vetor de forças de corpo, \bar{T} o vetor de forças prescritas no contorno S .

De modo similar a este, tem-se o teorema de mínima energia complementar de dissipação. Esse, procura encontrar dentre todas as soluções estaticamente admissíveis σ^L (tensão atual) e T^L (força de superfície), aquela que minimiza o funcional:

$$\Pi_p(\sigma^L, T^L) = \int_V \Omega(\sigma^L) dV - \int_S T^L \dot{u}_i dS \quad (106)$$

Nos problemas planos, há que se considerar a incompressibilidade do material. Tomando-se a equação (105), esta condição pode ser introduzida no funcional por meio de uma função de penalidade, válida para o caso de problemas de estado plano de deformação ou sólidos axissimétricos. Entretanto isso não é necessário para o caso de estado plano de tensão, conforme se discutirá mais adiante.

O fator de penalidade λ é introduzido no funcional para manter volume do sólido inalterado, quando este for submetido a uma variação de tensão. Observa-se que o fator de penalidade multiplica o traço do tensor de deformação. Esse fator é um escalar que impõe a incompressibilidade. Para o fenômeno de *creep* é adotado λ da ordem de $10^4 - 10^8$ vezes maior que o valor médio dos elementos da matriz de rigidez, conforme [XUE e WANG (1995)]. Assim, o funcional (105) pode ser reescrito como:

$$\Pi_p^* (\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) = \Pi_p (\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) + \int_V \frac{\lambda}{2} (\dot{\varepsilon}_{ii}^L)^2 dV \quad (107)$$

Fazendo uma variação no funcional tem-se:

$$\delta \Pi_p^* (\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) = \delta \Pi_p (\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) + \delta \int_V \frac{\lambda}{2} (\dot{\varepsilon}_{ii}^L)^2 dV \quad (108)$$

$$\delta \Pi_p^* (\dot{u}_i^L, \dot{\varepsilon}_{ij}^L) = \int_V \delta W(\dot{\varepsilon}_{ij}^L) dV - \int_V \bar{b}_i \delta \dot{u}_i^L dV - \int_S \bar{T} \delta \dot{u}_i^L ds + \int_V \lambda \dot{\varepsilon}_{ij}^L \delta \dot{u}_i^L dV \quad (109)$$

Aplicando o teorema da divergência e suprimindo os índices superescritos L , resulta:

$$\delta \Pi_p^* (\dot{u}_i, \dot{\varepsilon}_{ij}) = - \int_V [S_{ij,j} + \bar{b}_i + (\lambda \dot{\varepsilon}_{ij})_{,i}] \delta \dot{u}_i dV + \int_S [S_{ij} n_j - \bar{T}_i + \lambda \dot{\varepsilon}_{jj} n_i] \delta \dot{u}_i ds = 0 \quad (110)$$

Considerando a expressão anterior para qualquer variação $\delta \dot{u}_i$, tem-se:

- equação de governo:

$$S_{ij,j} + \bar{b}_i + (\lambda \dot{\varepsilon}_{ij})_{,i} = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ no domínio;} \quad (111)$$

- condição de contorno natural:

$$S_{ij} n_j + \lambda \dot{\varepsilon}_{jj} n_i = \bar{T}_i \quad (i=1,2,3) \text{ no contorno;} \quad (112)$$

Por outro lado, da teoria de elasticidade, sabe-se que:

- equação de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ no domínio;} \quad (113)$$

- condição de carga no contorno:

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{T}_i \quad (i=1,2,3) \text{ no contorno;} \quad (114)$$

Sabendo que $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m$, $\sigma_m = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{ij}$ onde S_{ij} é o tensor desviador de tensões, e δ_{ij} delta de Kronecker, após a decomposição do tensor σ_{ij} em (113) e em (114), tem-se:

$$S_{ij,j} + \sigma_{m,i} + \bar{b}_i = 0 \text{ no domínio} \quad (115)$$

e

$$S_{ij}n_j + \sigma_m n_i = \bar{T}_i \text{ no contorno } S. \quad (116)$$

Comparando-se as equações (112) com (116) obtém-se:

$$\sigma_m = \lambda \dot{\epsilon}_{ii} = 3\lambda \dot{\epsilon}_m \quad (117)$$

A energia potencial de dissipação por unidade de volume é dada por, [XUE e WANG (1995, a)]:

$$W^*(\dot{\epsilon}_{ij}) = W(\dot{\epsilon}_{ij}) + \frac{1}{2}\lambda \dot{\epsilon}_{ij}^2 \quad (118)$$

Pode-se escrever a equação (109) como:

$$\delta \Pi_p^*(\dot{u}_i, \dot{\varepsilon}_{ij}) = \int_V \delta W^*(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V \bar{b}_i \delta \dot{u}_i dV - \int_S \bar{T} \delta \dot{u}_i ds \quad (119)$$

Das equações (103) e (105) tem-se:

$$\delta W(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = S_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (120)$$

Pode-se então escrever a variação em $W^*(\dot{\varepsilon}_{ij})$ como:

$$\delta W^*(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \delta W(\dot{\varepsilon}_{ij}) + \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} \delta \dot{\varepsilon}_{jj} = S_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} \delta \dot{\varepsilon}_{jj} \quad (121)$$

Considerando a equação (102) e reescrevendo como:

$$S_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (122)$$

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{f^{-1}(\dot{\varepsilon}_e)}{\dot{\varepsilon}_e} \quad (123)$$

O coeficiente μ é obtido conforme as diversas leis da viscoelasticidade, conforme segue:

-Para a lei de Norton

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{\dot{\varepsilon}_e^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}}{\frac{1}{b^n}} \quad (124)$$

-Para a lei de Prandtl

$$\mu = \frac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{C}\right)}{3\alpha\dot{\varepsilon}_e} \quad (125)$$

-Para a lei de Dorn

$$\mu = \frac{\ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{d}\right)}{3\beta\dot{\varepsilon}_e} \quad (126)$$

-Para a lei de Garofalo

$$\mu = \frac{\operatorname{arcsinh}\left[\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{A}\right)^{1/n}\right]}{3\gamma\dot{\varepsilon}_e} \quad (127)$$

Substituindo a equação (122) em (121) tem-se:

$$\delta W^*(\varepsilon_{ij}) = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda\dot{\varepsilon}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (128)$$

Reescrevendo o tensor $\dot{\varepsilon}_{ij}$ na forma vetorial, de modo que $\dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_x$, $\dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_y$, $\dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_z$, etc. e colocando a expressão anterior na forma matricial, pode-se escrever $W^*(\dot{\varepsilon}_{ij})$ como:

$$\delta W^*(\varepsilon_{ij}) = \delta\dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} \quad (129)$$

onde: $\dot{\varepsilon} = \{\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}\}$ e sabendo-se que $\dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\varepsilon}_{xy}$, $\dot{\gamma}_{yz} = 2\dot{\varepsilon}_{yz}$, e $\dot{\gamma}_{zx} = 2\dot{\varepsilon}_{zx}$, tem-se:

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (130)$$

Então equação (119) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\delta \Pi_p^*(\dot{u}, \dot{\varepsilon}) = \int_V \delta \dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} dV - \int_V \bar{b}^T \delta \dot{u} dV - \int_S \bar{T}^T \delta \dot{u} dS \quad (131)$$

Minimizar o funcional (131) resulta em anular a variação do mesmo:

$$\delta \Pi_p^*(\dot{u}, \dot{\varepsilon}) = \int_V \delta \dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} dV - \int_V \bar{b}^T \delta \dot{u} dV - \int_S \bar{T}^T \delta \dot{u} dS = 0 \quad (132)$$

ou

$$\int_V \delta \dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} dV = \int_V \bar{b}^T \delta \dot{u} dV + \int_S \bar{T}^T \delta \dot{u} dS \quad (133)$$

Esta equação representa o princípio das potências virtuais, mostrando o equilíbrio entre as potências virtuais internas e externas. Sendo assim, pode-se resolver esta equação utilizando o MEF, onde cada lado da equação (133) equivale às equações de equilíbrio do elemento.

4.4- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AO *CREEP* ESTACIONÁRIO

Considerando a fase em que o material está sujeito a deformações de *creep*, e seguindo a formulação de elementos finitos, onde \dot{u} é o vetor taxa de deslocamentos nodais, N é a matriz de funções de forma e B a matriz taxa de deformação correspondente a N . Propõe-se a seguinte interpolação para o campo taxa de deslocamentos:

$$\dot{u} = N \dot{U} \quad (134)$$

que resulta em:

$$\dot{\varepsilon} = B \dot{U} \quad (135)$$

onde, N é a matriz de funções de forma e B a matriz taxa de deformação correspondente a N .

A variação das incógnitas nodais é dada por:

$$\delta \dot{u} = N \delta \dot{U} \quad (136)$$

$$\delta \dot{\varepsilon} = B \delta \dot{U} \quad (137)$$

Substituindo as equações (135) e (137) em (133) e considerando a taxa de deslocamento virtual $\delta \dot{u}$, tem-se:

$$\int_V B^T \sigma dV - \int_V N^T \bar{b} dV - \int_S N^T \bar{T} dS = 0 \quad (138)$$

Sabendo-se que no problema de *creep* estacionário

$$\sigma = D\dot{\varepsilon} \quad (139)$$

A relação (139) é tipicamente não linear e, para tanto, pode ser resolvida por um método apropriado, por exemplo, o Método de Newton Raphson. Assim a matriz de rigidez tangente inerente ao processo não linear pode ser escrita como:

$$K_T = \int_V B^T \frac{d\sigma}{d\dot{\varepsilon}} \frac{d\dot{\varepsilon}}{d\dot{a}} dV = \int_V B^T D_T B dV \quad (140)$$

onde:

$$D_T = \frac{d\sigma}{d\dot{\varepsilon}} \quad (141)$$

Tomando-se a equação (122) e derivando, tem-se:

$$dS_{ij} = 2\dot{\varepsilon}_{ij}d\mu + 2\mu d\dot{\varepsilon}_{ij} = 2\dot{\varepsilon}_{ij} \frac{d\mu}{d\dot{\varepsilon}_e} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_e}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}} d\dot{\varepsilon}_{kl} + 2\mu d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (142)$$

$$dS_{ij} = 2\dot{\varepsilon}_{ij} \frac{d\mu}{d\dot{\varepsilon}_e} \frac{2}{3\dot{\varepsilon}_e} \dot{\varepsilon}_{kl} d\dot{\varepsilon}_{kl} + 2\mu d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (143)$$

Designando, ω como:

$$\omega = \frac{d\mu}{d\dot{\varepsilon}_e} \frac{2}{3\dot{\varepsilon}_e} \quad (144)$$

então a equação (143) fica:

$$dS_{ij} = 2\omega \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{kl} d\dot{\varepsilon}_{kl} + 2\mu d\dot{\varepsilon}_{ij} \quad (145)$$

O coeficiente ω é dado pela a lei da viscoelasticidade, como segue:

Para a lei de Norton

$$\omega = \frac{2(1-n)}{9n} \frac{\dot{\varepsilon}_e^{(1/n-1)}}{B^{1/n}} \quad (146)$$

Para a lei de Prandtl

$$\omega = \frac{2}{9\alpha\dot{\varepsilon}_e^2} \left[\frac{1}{\sqrt{C^2 + \dot{\varepsilon}_e^2}} - \frac{\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{C}\right)}{\dot{\varepsilon}_e} \right] \quad (147)$$

Para de Dorn

$$\omega = \frac{2 \left[1 - \ln\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{D}\right) \right]}{9\beta\dot{\varepsilon}_e^3} \quad (148)$$

Para a lei de Garofalo

$$\omega = \frac{2}{9\gamma n \dot{\varepsilon}_e^3} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{A}\right)^{(-2/n)} + 1}} - n \cdot \operatorname{arcsinh} \left[\left(\frac{\dot{\varepsilon}_e}{A}\right)^{1/n} \right] \right] \quad (149)$$

Sabendo-se pela equação (117) que $\sigma_m = \lambda \dot{\varepsilon}_{ii} = 3\lambda \dot{\varepsilon}_m$ e derivando equação, tem-se

$$d\sigma_m = \lambda d\dot{\epsilon}_m \quad (150)$$

Desse modo:

$$d\sigma_{ij} = dS_{ij} + \delta_{ij} d\sigma_m \quad (151)$$

$$d\sigma_{ij} = (2\mu\delta_{ik}\delta_{jl} + 2\omega\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{kl} + \lambda\delta_{kv}\delta_{in}\delta_{ij})d\dot{\epsilon}_{kl} \quad (152)$$

Escrevendo os incrementos de tensão e taxas de deformação em forma matricial:

$$d\sigma = D_T d\dot{\epsilon} \quad (153)$$

onde

$$d\sigma = [d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{zx}]^T \quad (154)$$

$$d\dot{\epsilon} = [d\dot{\epsilon}_x, d\dot{\epsilon}_y, d\dot{\epsilon}_z, d\dot{\gamma}_{xy}, d\dot{\gamma}_{yz}, d\dot{\gamma}_{zx}]^T \quad (155)$$

onde

$$D_T = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + 2\omega\dot{\epsilon}_x^2 & \lambda + 2\omega\dot{\epsilon}_x\dot{\epsilon}_y & \lambda + 2\omega\dot{\epsilon}_x\dot{\epsilon}_z & \omega\dot{\epsilon}_x\dot{\gamma}_{xy} & \omega\dot{\epsilon}_x\dot{\gamma}_{yz} & \omega\dot{\epsilon}_x\dot{\gamma}_{zx} \\ & \lambda + 2\mu + 2\omega\dot{\epsilon}_y^2 & \lambda + 2\omega\dot{\epsilon}_y\dot{\epsilon}_z & \omega\dot{\epsilon}_y\dot{\gamma}_{xy} & \omega\dot{\epsilon}_y\dot{\gamma}_{yz} & \omega\dot{\epsilon}_y\dot{\gamma}_{zx} \\ & & \lambda + 2\mu + 2\omega\dot{\epsilon}_z^2 & \omega\dot{\epsilon}_z\dot{\gamma}_{xy} & \omega\dot{\epsilon}_z\dot{\gamma}_{yz} & \omega\dot{\epsilon}_z\dot{\gamma}_{zx} \\ & & & \mu + \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{xy}^2 & \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{yz} & \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{xy}\dot{\gamma}_{zx} \\ & & & & \mu + \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{yz}^2 & \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{yz}\dot{\gamma}_{zx} \\ & & & & & \mu + \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{zx}^2 \end{bmatrix} \quad (156)$$

Observa-se que a matriz D_T na equação (156) é simétrica. Esta matriz representa a propriedade do material no incremento k e representa a inclinação da curva $\sigma \times \dot{\epsilon}$, sendo variável a cada passo. Deve ser atualizada a cada passo de iteração até que se verifique o equilíbrio segundo o Método de Newton Raphson (MNR).

Uma vez conhecida a matriz de rigidez tangente K_T , a solução pode ser obtida através do sistema:

$$K_T \Delta \dot{U} = \Delta F \quad (157)$$

As formulações descritas até aqui servem para um estado multiaxial de tensão, onde foram obtidas as matrizes de propriedades inelásticas de *creep* para problemas 3D. A seguir serão apresentadas as matrizes de propriedades inelásticas de *creep* particularizadas para os problemas bidimensionais, que são: estado plano de tensão, estado plano de deformação e estado axissimétrico de tensão.

4.5 ESTADO PLANO DE TENSÃO

Para o estado plano de tensão considera-se:

$$\sigma_z = 0 \quad (158)$$

$$\sigma_m = -S_z = -2\mu\dot{\epsilon} \quad (159)$$

Por causa da incompressibilidade, tem-se então:

$$\dot{\epsilon}_z = -(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (160)$$

Substituindo-se a equação (160) em (159)

$$\sigma_m = 2\mu(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (161)$$

Considerando-se

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = 0 \quad (162)$$

a equação (121), pode ser escrita como:

$$\delta W^* = S_x \delta \dot{\epsilon}_x + S_y \delta \dot{\epsilon}_y - \tau_{xy} \delta \dot{\epsilon}_{xy} + S_z \delta \dot{\epsilon}_z$$

$$\delta W^* = 2\mu \dot{\epsilon}_x \delta \dot{\epsilon}_x + 2\mu \dot{\epsilon}_y \delta \dot{\epsilon}_y + \mu \dot{\gamma}_{xy} \delta \dot{\gamma}_{xy} + 2\mu(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \delta(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) \quad (163)$$

$$\delta W^* = \delta \dot{\epsilon}^T D \dot{\epsilon}$$

onde:

$$\dot{\epsilon} = [\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}]^T \quad (164)$$

$$D = \begin{bmatrix} 4\mu & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (165)$$

Considerando as equações (122) e (161), pode-se escrever as componentes de tensão como:

$$\sigma_x = S_x + \sigma_m = 2\mu \dot{\epsilon}_x + 2\mu(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) = 4\mu \dot{\epsilon}_x + 2\mu \dot{\epsilon}_y \quad (166)$$

$$\sigma_y = S_y + \sigma_m = 2\mu \dot{\epsilon}_y + 2\mu(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) = 2\mu \dot{\epsilon}_x + 4\mu \dot{\epsilon}_y \quad (167)$$

$$\tau_{xy} = \mu \gamma_{xy} \quad (168)$$

Colocando-se na forma matricial

$$\sigma = D \dot{\epsilon} \quad (169)$$

A deformação efetiva será dada por:

$$\dot{\epsilon}_e^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2}{3} \left(2\dot{\epsilon}_x^2 + 2\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + 2\dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}^2 \right) \quad (170)$$

A derivada a equação (170) é:

$$\dot{\epsilon}_e d\dot{\epsilon}_e = \frac{2}{3} \left[(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) d\dot{\epsilon}_x + (2\dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_x) d\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} d\dot{\gamma}_{xy} \right] \quad (171)$$

Pode-se então escrever a variação em μ , como:

$$d\mu = \frac{d\mu}{d\dot{\epsilon}_e} d\dot{\epsilon}_e = \frac{2d\mu}{3\dot{\epsilon}_e d\dot{\epsilon}_e} \left[(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) d\dot{\epsilon}_x + (2\dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_x) d\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} d\dot{\gamma}_{xy} \right] \quad (172)$$

$$d\mu = \omega \left[(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) d\dot{\epsilon}_x + (2\dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_x) d\dot{\epsilon}_y + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy} d\dot{\gamma}_{xy} \right] \quad (173)$$

Diferenciando-se a equação (166)

$$\begin{aligned} d\sigma_x = & \left[4\mu + 2\omega(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y)^2 \right] d\dot{\epsilon}_x + \\ & + \left[2\mu + 2\omega(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y)(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y) \right] d\dot{\epsilon}_y + \\ & + \left[\omega(2\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y)\dot{\gamma}_{xy} \right] d\dot{\gamma}_{xy} \end{aligned} \quad (174)$$

Diferenciando-se a equação (167)

$$\begin{aligned} d\sigma_y = & \left[2\mu + 2\omega(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y) \right] d\dot{\varepsilon}_x + \\ & + \left[4\mu + 2\omega(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 \right] d\dot{\varepsilon}_y + \\ & + \left[\omega(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y)\dot{\gamma}_{xy} \right] d\dot{\gamma}_{xy} \end{aligned} \quad (175)$$

Diferenciando-se finalmente a equação (168)

$$\begin{aligned} d\sigma_{xy} = & \left[\omega(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)\dot{\gamma}_{xy} \right] d\dot{\varepsilon}_x + \\ & + \left[\omega(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y)\dot{\gamma}_{xy} \right] d\dot{\varepsilon}_y \\ & + \left[\mu + \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{xy}^2 \right] d\dot{\gamma}_{xy} \end{aligned} \quad (176)$$

Escrevendo-se em notação matricial

$$d\sigma = D_T d\dot{\varepsilon} \quad (177)$$

onde

$$D_T = \begin{bmatrix} 4\mu + 2\omega(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 & 2\mu + 2\omega(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y)(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) & \omega\dot{\gamma}_{xy}(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \\ 2\mu + 2\omega(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y)(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) & 4\mu + 2\omega(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y)^2 & \omega\dot{\gamma}_{xy}(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y) \\ \omega\dot{\gamma}_{xy}(2\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) & \omega\dot{\gamma}_{xy}(\dot{\varepsilon}_x + 2\dot{\varepsilon}_y) & \mu + \frac{1}{2}\omega\dot{\gamma}_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (178)$$

Deve-se ressaltar que para o problema de estado plano de tensão a incompressibilidade é introduzida em função da equação (160) não em função da penalidade. Já para o problema de estado plano de deformação e para o caso axissimétrico a incompressibilidade é introduzida via fator de penalidade, como será descrito a seguir.

4.6 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

Para o estado plano de deformação, considera-se que

$$\dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (179)$$

Desse modo,

$$S_z = 2\mu\dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (180)$$

e

$$\sigma_z = \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (181)$$

considerando ainda que

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\gamma}_{yz} = 0 \quad (182)$$

então

$$\delta W^* = S_x \delta \dot{\varepsilon}_x + S_y \delta \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \delta \dot{\varepsilon}_{xy} + S_z \delta \dot{\varepsilon}_z + \lambda(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \delta(\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) \quad (183)$$

$$\delta W^* = \delta \dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} \quad (184)$$

onde:

$\dot{\varepsilon}$ é o vetor taxa de deformação e,

$$\dot{\varepsilon} = [\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}]^T \quad (185)$$

D é a matriz de relações constitutivas inelásticas para o problema de *creep* no estado plano de deformação.

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (186)$$

As componentes de tensão são:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (187)$$

tal que:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (188)$$

A matriz D_T para o estado plano de deformação pode assim ser expressa por:

$$D_T = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda + 2\omega\varepsilon_x^2 & \lambda + 2\omega\varepsilon_x\varepsilon_y & \omega\gamma_{xy}\varepsilon_x \\ \lambda + 2\omega\varepsilon_x\varepsilon_y & 2\mu + \lambda + 2\omega\varepsilon_y^2 & \omega\gamma_{xy}\varepsilon_y \\ \omega\gamma_{xy}\varepsilon_x & \omega\gamma_{xy}\varepsilon_y & \mu + \frac{1}{2}\omega\gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (189)$$

4.6 ESTADO AXISSIMÉTRICO DE TENSÃO

Para o problema axissimétrico pode-se escrever a equação (128) como segue:

$$\delta W^* = 2\mu\dot{\varepsilon}_r\delta\dot{\varepsilon}_r + 2\mu\dot{\varepsilon}_z\delta\dot{\varepsilon}_z + \mu\dot{\gamma}_{rz}\delta\dot{\gamma}_{rz} + 2\mu\dot{\varepsilon}_\theta\delta\dot{\varepsilon}_\theta + \lambda(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\theta)\delta(\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_z + \dot{\varepsilon}_\theta) \quad (190)$$

onde $\dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_\theta, \dot{\varepsilon}_z$ são taxa de deformação em relação ao raio r , ao ângulo θ e ao eixo z , respectivamente. $\dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{rz}$

A equação (190) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\delta W^* = \delta \dot{\varepsilon}^T D \dot{\varepsilon} \quad (191)$$

onde

$$D = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 2\mu + \lambda \end{bmatrix} \quad (192)$$

D é a matriz de relações constitutivas inelásticas para o problema de *creep* no estado axissimétrico de tensão.

As componentes de tensão são obtidas fazendo-se:

$$\sigma = D \dot{\varepsilon} \quad (193)$$

onde

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta]^T \quad (194)$$

A matriz D_T para o problema axissimétrico é dada por:

$$D_T = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_r^2 & \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_r \dot{\varepsilon}_z & \omega \dot{\varepsilon}_r \dot{\gamma}_{rz} & \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_r \dot{\varepsilon}_\theta \\ \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_z \dot{\varepsilon}_r & 2\mu + \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_z^2 & \omega \dot{\varepsilon}_z \dot{\gamma}_{rz} & \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_z \dot{\varepsilon}_\theta \\ \omega \dot{\gamma}_{rz} \dot{\varepsilon}_r & \omega \dot{\gamma}_{rz} \dot{\varepsilon}_z & \mu + \frac{1}{2} \omega \dot{\gamma}_{rz}^2 & \omega \dot{\gamma}_{rz} \dot{\varepsilon}_\theta \\ \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_\theta \dot{\varepsilon}_r & \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_\theta \dot{\varepsilon}_z & \omega \dot{\varepsilon}_\theta \dot{\gamma}_{rz} & 2\mu + \lambda + 2\omega \dot{\varepsilon}_\theta^2 \end{bmatrix} \quad (195)$$

4.7 – PROCESSO DE SOLUÇÃO NÃO LINEAR

Como o problema de *creep* apresenta um comportamento não linear, para resolução do sistema apresentado na equação (157) será utilizando o método de Newton Raphson. Este método consiste num processo iterativo, onde, a cada passo de iteração as propriedades reológicas são atualizadas em função da taxa de deformação sofrida pelo material, conforme as leis propostas pelas equações (45) a (48).

A resolução do fenômeno de *creep* estacionário através do MEF é dividida em duas fases. Primeiramente se faz a análise elástica linear, onde são determinadas as deformações e tensões em cada nó dos elementos. Após isso, determinam-se as tensões equivalentes conforme a equação (67), de acordo com XUE e WANG (1995). Em seguida, adota-se $\sigma_{e\dot{adot}} = \frac{2}{3}\sigma_{e\max}$ para a primeira aproximação. Esse valor de tensão é utilizado para calcular a deformação efetiva, conforme as leis sugeridas nas equações (45) a (48), montar a matriz D_T e calcular a matriz de rigidez K_T , e a partir desse instante a análise passa a ser de forma iterativa.

Neste processo o que se faz é uma sucessão de aproximações lineares até que as leis constitutivas e as condições de equilíbrio e compatibilidade sejam satisfeitas com um erro dentro de um limite aceitável. A técnica consiste em determinar um vetor de forças nodais equivalentes ao nível de tensões totais, denominado F_i e comparar esse vetor com o vetor de cargas externas F_e . A diferença entre os dois resultados é um vetor de forças residuais não balanceadas denominado ΔF , resultado de uma falta de equilíbrio de forças internas e externas, não satisfazendo, por isso o PTV. Esse vetor de forças ΔF é aplicado novamente à estrutura e o processo é repetido até que ΔF seja suficientemente pequeno, satisfazendo assim as condições de equilíbrio numa condição aceitável.

O equilíbrio requer que:

$$\Delta F = F_e - F_i \cong 0 \quad (196)$$

onde o vetor de forças externas é:

$$F_e = \int_V N^T \bar{b} dv + \int_S N^T \bar{T} ds \quad (197)$$

e o vetor de forças internas equivalente é:

$$F_i^i = \int_V B^T \sigma^i dV \quad (198)$$

σ^i pode ser considerado como sendo as tensões correspondentes ao nível de taxa de deformação atingidas na i -ésima iteração $\dot{\epsilon}^i$, ΔF o vetor de força residual no i -ésimo passo.

A lei constitutiva que permite avaliar a tensão a partir da taxa de deformação é dada por:

$$\sigma = D_T \dot{\epsilon} \quad (199)$$

onde D_T é a matriz de propriedade do material em função do *creep*.

As forças internas podem ser avaliadas por

$$F_i^i = K_T^i \Delta \dot{U}^i \quad (200)$$

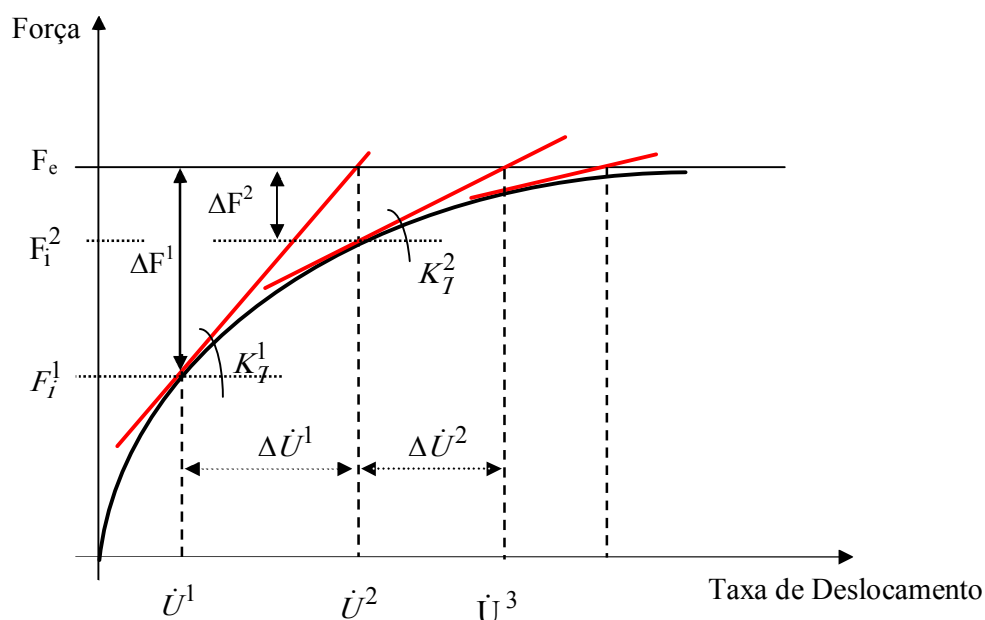
e

$$K_T = \int_V B^T D_T B dV \quad (201)$$

No processo clássico de Newton Raphson (NR) uma nova matriz de rigidez é calculada a cada iteração, levando-se em consideração as novas características do material. Isso implica num maior esforço computacional necessário para a montagem

da matriz de rigidez elementar, em função da matriz tangente D_T que depende das deformações efetivas em cada nó do elemento, para a partir deste momento formar a matriz global. Isto pode ser visualizado melhor na Figura 15, a seguir.

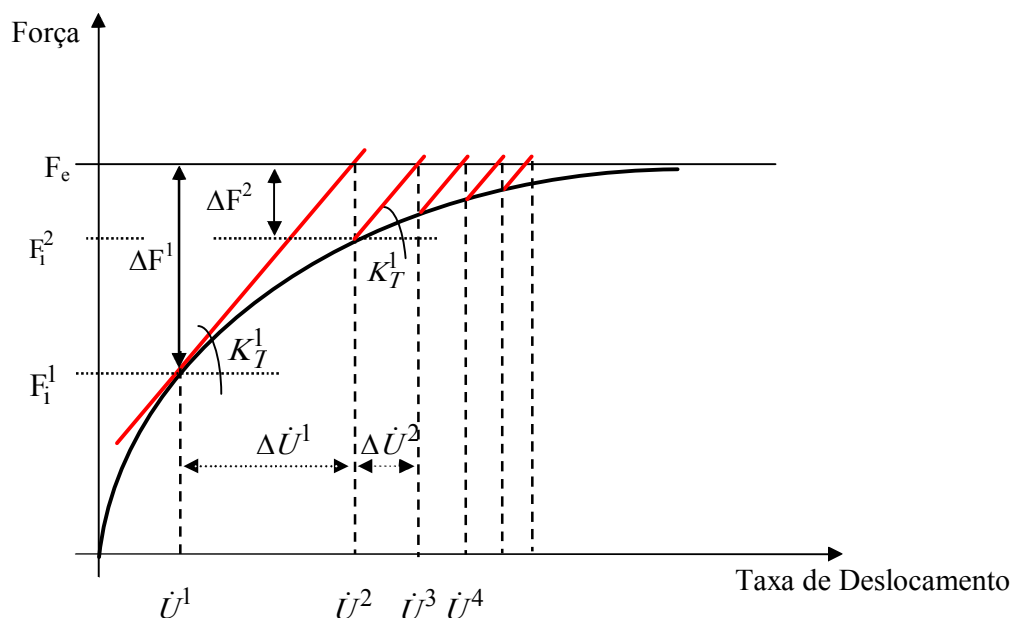
FIGURA 16- CONVERGÊNCIA PELO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON



O Método da Rigidez Constante, ou mais conhecido como, Método de Newton Modificado (mNR) , apresenta uma vantagem em relação ao método anterior, pois o custo computacional passa a ser reduzido, uma vez que neste método a matriz de rigidez tangente é calculada apenas na primeira iteração e mantida constante durante o processo, até que se atinja o equilíbrio. Porém deve-se ressaltar que existe uma desvantagem entre o mNR em relação ao NR pois apresenta uma convergência mais lenta, necessitando de mais iterações para convergir. Em determinados casos onde se tem uma não linearidade muito acentuada, é utilizada uma combinação dos dois métodos. Neste caso a matriz de rigidez é atualizada apenas na primeira iteração de

cada incremento de tempo. Neste trabalho foram utilizados apenas NR e mNR. A Figura 17, a seguir descreve a convergência do mNR.

FIGURA 17 - CONVERGÊNCIA PELO MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MODIFICADO



A forma de obtenção da solução não linear para o problema de *creep* estacionário será descrita no algoritmo a seguir:

a- Para a primeira iteração deve-se adotar o valor de $\sigma_{e\dot{\sigma}} = \frac{2}{3}\sigma_{e\max}$ máximo para montar a matriz D_T . Esta matriz será a mesma utilizada para montar a matriz de rigidez de todos os elementos;

b- Resolve-se o novo sistema

$$K_T^i \Delta \dot{U}^i = \Delta F^i = F_e - F_i^i \quad (202)$$

e determinam-se as taxas de deformação associadas a esta nova condição do material;

c- Utilizando as equações (45) a (48), avalia-se a matriz D_T em cada ponto de integração do elemento, considerando as deformações efetivas calculadas segundo a equação (69), forma-se a matriz de rigidez elementar e armazenando na matriz de rigidez global;

d- Com esta nova matriz de rigidez e com a taxa de deslocamento da iteração anterior (\dot{U}^{i-1}), avalia-se o vetor de forças internas associado, verificando-se o equilíbrio de forças internas e externas e, se for desbalanceada, avalia-se a nova taxa de deslocamento

$$\dot{U}^{i+1} = \dot{U}^i + \Delta\dot{U} \quad (203)$$

d) Com esta nova taxa de deslocamento, calculam-se a taxa de deformação associada, as deformações efetivas e a matriz D_T retomando-se ao procedimento b até convergir o processo. A convergência é obtida quando:

$$\|\Delta\dot{U}^i\| \leq tol_1 \|\dot{U}^i\| \quad (204)$$

$$\|\Delta F^i\| \leq tol_2 \|F_e\| \quad (205)$$

onde tol_1 e tol_2 são limites de tolerâncias preestabelecidos para convergência do processo de iteração.

e) Avalia-se o valor das tensões nodais. Deve-se ter o cuidado de montar a matriz D_T considerando a taxa de deformação da iteração anterior.

No próximo capítulo serão apresentadas algumas aplicações numéricas que procuram mostrar a validade da metodologia proposta.

5 - VERIFICAÇÕES NUMÉRICAS

Para as verificações numéricas foram utilizados os parâmetros da Tabela 1 a seguir, considerando as propriedades do aço inoxidável tipo 304SS (Heat 9T4296) 593°C. Os parâmetros são apresentados segundo as leis de Norton, Prandtl, Dorn e Garofalo.

TABELA 1 - PARÂMETROS PARA O AÇO 304SS (HEAT 9T4296) 593°C [XUE E WANG (1995)]

| Tensão (Pa), tempo (s) | Constante | Valor |
|--|-----------|------------------|
| Norton: $f(\sigma_e) = b\sigma_e^n$ | b | $8,164.10^{-48}$ |
| | n | 4.6875 |
| Prandtl: $f(\sigma_e) = C\sinh(\alpha\sigma_e)$ | C | $6,7117.10^{12}$ |
| | A | $4,3076.10^{-8}$ |
| Dorn: $f(\sigma_e) = d \exp(\beta\sigma_e)$ | d | $3,3208.10^{11}$ |
| | β | $4,3163.10^{-8}$ |
| Garofalo: $f(\sigma_e) = A[\sinh(\gamma\sigma_e)]^{nn}$ | A | $6,6742.10^{11}$ |
| | γ | $1,2256.10^{-8}$ |
| | nn | 3,0295 |

As verificações foram feitas considerando o estado plano de tensões e o estado axissimétrico de tensão.

5.1 - VIGA SOB FLEXÃO PURA

Para solução deste problema foi considerada uma viga com base $b=10 \text{ cm}$, altura $h = 10 \text{ cm}$ e comprimento $l = 1,0 \text{ m}$, sujeita a ação de um momento fletor $M = 10 \text{ KNm}$ aplicado em sua extremidade livre, conforme a Figura 18.

A solução via MEF foi feita considerando-se uma malha 6 x 6 de elementos

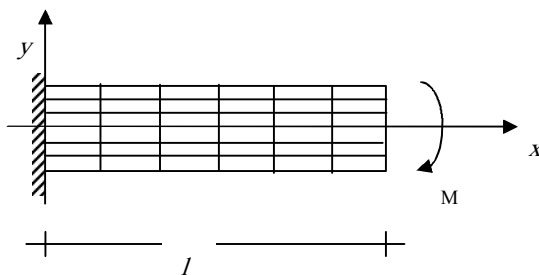
isoparamétricos de oito nós sob estado plano de tensão. Os resultados são mostrados a seguir.

Para este problema a solução analítica é dada por BOYLE (1983), considerando a lei de Norton para um problema de viga sob flexão como sendo:

$$\sigma_x = \frac{M|y|^{1/n}}{I_n} \quad (206)$$

$$I_n = \frac{2b(h/2)^{2+1/n}}{2+1/n} \quad (207)$$

FIGURA 18 – VIGA SOB FLEXÃO PURA



A Tabela 2, apresenta os resultados das tensões obtidos após o equilíbrio pelo mNR para as diversas leis de *creep*. Apresentam-se também os resultados das tensões obtidas pela solução analítica equação (206). Estes resultados são apresentados graficamente facilitando a visualização através do Gráfico 1.

TABELA 2 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O PROBLEMA DE FLEXÃO PURA

| Tensão de <i>Creep</i> - σ_x | | | | | | |
|-------------------------------------|---------------------|-------------------|----------------|---------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Coord. Y Nós Ext. Livre | Modelo Implementado | | | | Solução Analítica Boyle (1983) | Xue e Wang (1995) Lei de Norton |
| | Lei de Norton | Lei de Prandtl | Lei de Dorn | Lei de Garofallo | | |
| (m) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) |
| 0,05 | 44,51 | 44,37 | 39,66 | 44,87 | 44,27 | 44,08 |
| 0,042 | 42,90 | 43,34 | 39,18 | 43,24 | 42,59 | 42,43 |
| 0,033 | 40,33 | 41,16 | 37,79 | 40,52 | 40,59 | 40,74 |
| 0,025 | 37,32 | 37,96 | 35,12 | 37,23 | 38,28 | 38,21 |
| 0,017 | 33,76 | 32,32 | 32,18 | 33,09 | 35,03 | 36,12 |
| 0,008 | 29,20 | 22,28 | 32,92 | 27,59 | 30,18 | 29,38 |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |

GRÁFICO 1 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES ELÁSTICAS E A TENSÃO DE CREEP PARA A LEI DE NORTON

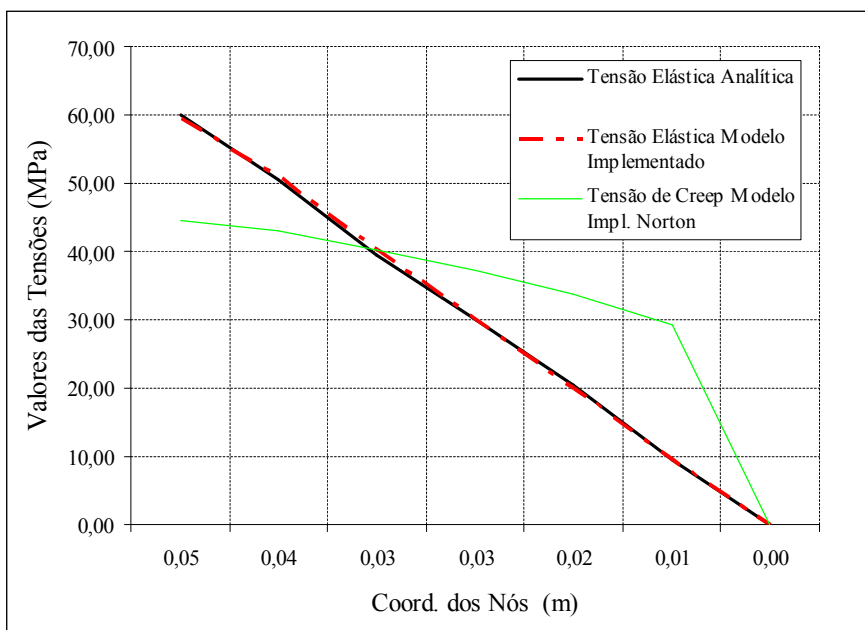
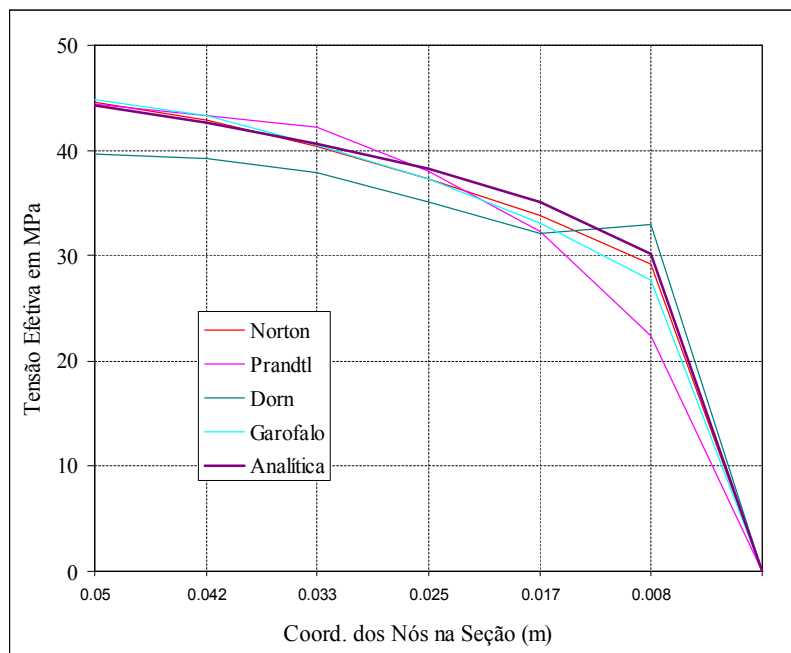


GRÁFICO 2 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS DIVERSAS LEIS DE *CREEP* E A SOLUÇÃO ANALÍTICA



O Gráfico 1 mostra a distribuição das tensões ao longo da seção da viga. Observa-se que nos pontos próximos a linha neutra onde as tensões elásticas são originalmente baixas, após a redistribuição de tensão pelo fenômeno de creep as tensões aumentam consideravelmente. Então deve verificar se as seções que originalmente estavam bem condicionadas aos valores de tensão elástica, não passaram a sofrer tensões acima do estipulado em projeto.

No Gráfico 2 pode-se observar, de modo geral, o bom comportamento das respostas obtidas pelo modelo implementado através do MEF, para as diversas leis da viscoelasticidade, quando comparadas com a solução analítica.

A seguir serão apresentados gráficos onde se comparam os resultados obtidos pelo modelo implementado com os resultados de XUE e WANG (1995, b), e

os obtidos através da solução analítica.

GRÁFICO 3 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI NORTON, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

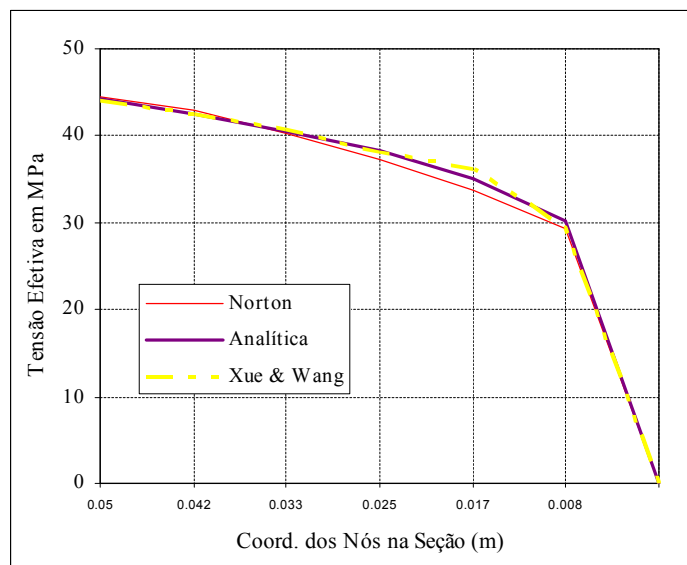


GRÁFICO 4 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA DE LEI PRANDTL, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

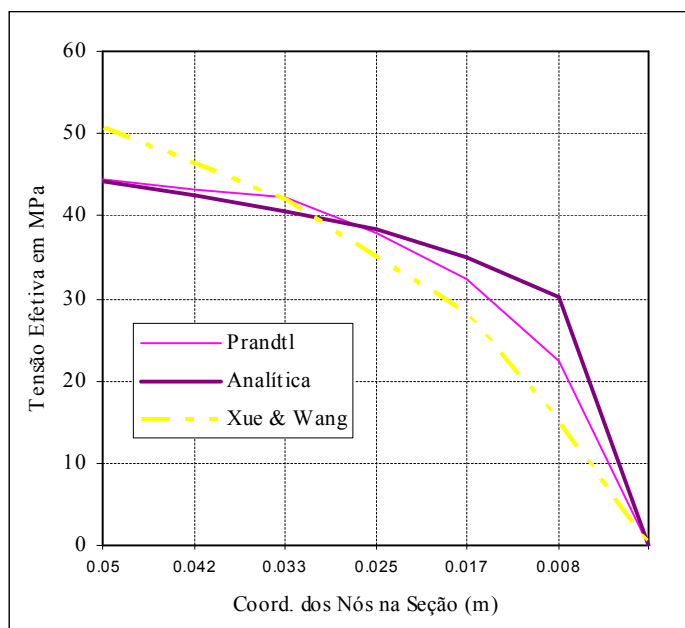


GRÁFICO 5 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DE DORN, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

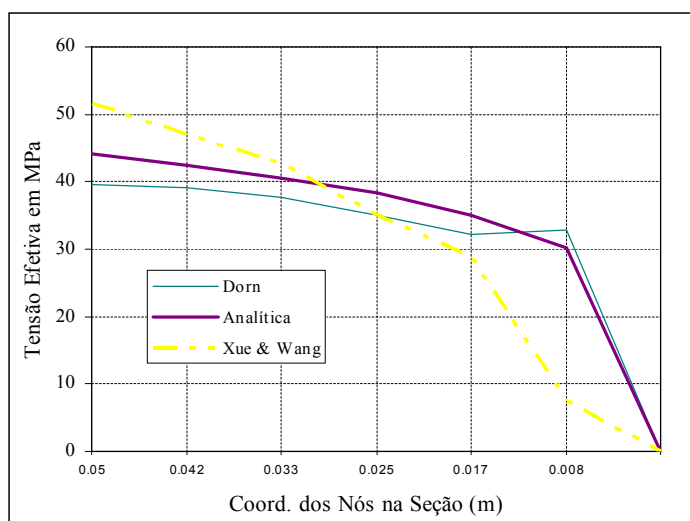
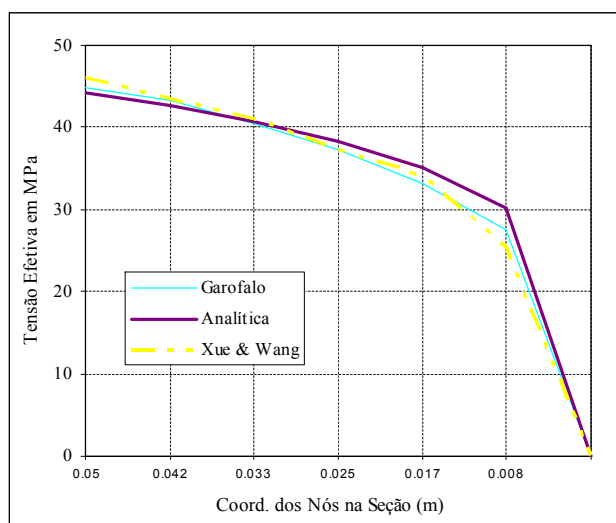


GRÁFICO 6 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DE GAROFALO, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG



Nos Gráficos 3 e 6, pode-se observar que a solução implementada através da lei de Norton e lei de Garofalo, apresentam o mesmo comportamento. Quando comparadas com a solução de XUE e WANG (1995) e a solução analítica, observa-se que não ocorrem grandes desvios. As curvas obtidas pelo MEF acompanham a solução analítica, e as soluções obtidas pelos modelos implementados apresentam uma boa

aproximação validando o método.

No Gráfico 4 observa-se que o modelo implementado através da lei de Prandtl apresenta melhores resultados que o modelo de XUE e WANG (1995), quando comparado com a solução analítica. Na região de maior tensão o valor inicial 44,7 MPa é praticamente igual ao valor da solução analítica. Na região de menor tensão a curva obtida pelo MEF implementado acompanha a solução analítica.

Para a lei de Dorn, pode-se observar no Gráfico 5 que o modelo implementado apresenta um melhor comportamento do que o modelo de XUE e WANG (1995). Observa-se que na região de maior tensão o valor inicial de 40MPa aproximadamente é bem próximo da solução analítica, seguindo-se uma curva suave que acompanha a solução analítica. Na região de menor tensão a solução aproximada praticamente coincide com a solução analítica. Isto reflete a boa aproximação do método validando a formulação. Observa-se que o modelo de XUE e WANG (1995) não apresenta um bom comportamento, quando comparado com a solução analítica.

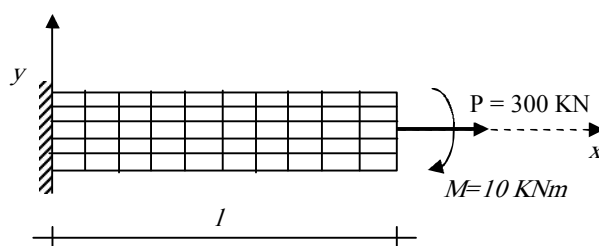
As soluções obtidas nos modelos implementados através do MEF nas diferentes leis da viscoelasticidade, mostram em geral uma boa aproximação. Isto reflete a importância do MEF aplicado a solução destes problemas, e validam o modelo apresentado por XUE e WANG (1995).

5.2 - VIGA SOB FLEXÃO COMPOSTA

Neste exemplo, foram consideradas as mesmas dimensões do caso anterior, porém a viga fica sujeita a ação de um momento $M = 10 \text{ kNm}$ e uma carga axial concentrada de $P = 300 \text{ kN}$ na extremidade livre da viga engastada conforme a Figura 19. Foi utilizada uma malha de 10 elementos na horizontal e 5 elementos na vertical, sendo estes elementos isoparamétricos de oito nós. Para se encontrar a tensão de referência foram adotados dois métodos diferentes conforme apresentado por XUE e WANG (1995). Esta tensão permite calcular os valores limites de carregamento que

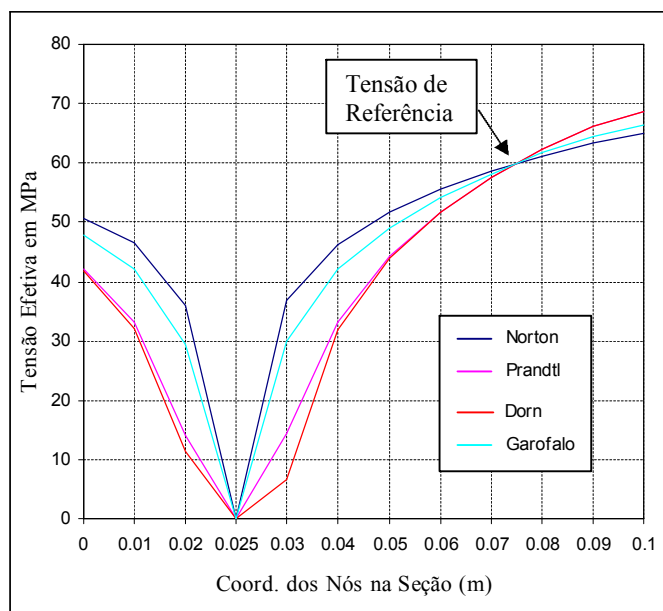
podem ser aplicados à estrutura a fim de verificar a integridade da mesma, é um tipo de tensão admissível em analogia a fase elástica. O primeiro método consiste em se determinar às tensões para as leis de Norton, Prandtl, Dorn e Garofalo, sendo a tensão de referência dada pelo ponto de interseção entre as diferentes curvas de tensões, KRAUS (1980) e BOYLE (1983) também abordam uma técnica para determinar a tensão de referência. Os resultados apresentados correspondem aos nós da extremidade livre da viga e são indicados no Gráfico 7.

FIGURA 19 – VIGA SOB FLEXÃO COMPOSTA



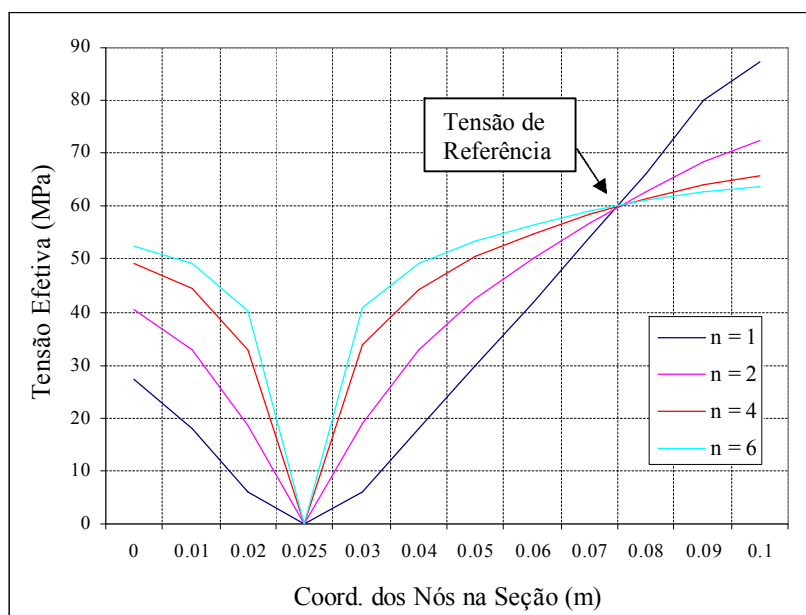
São apresentados, a seguir, gráficos onde as tensões equivalentes para as diversas leis de *creep* são sobrepostas, e conforme o método descrito pode-se obter a tensão equivalente.

GRÁFICO 7 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS LEIS *CREEP*, OBTENÇÃO DA TENSÃO EFETIVA



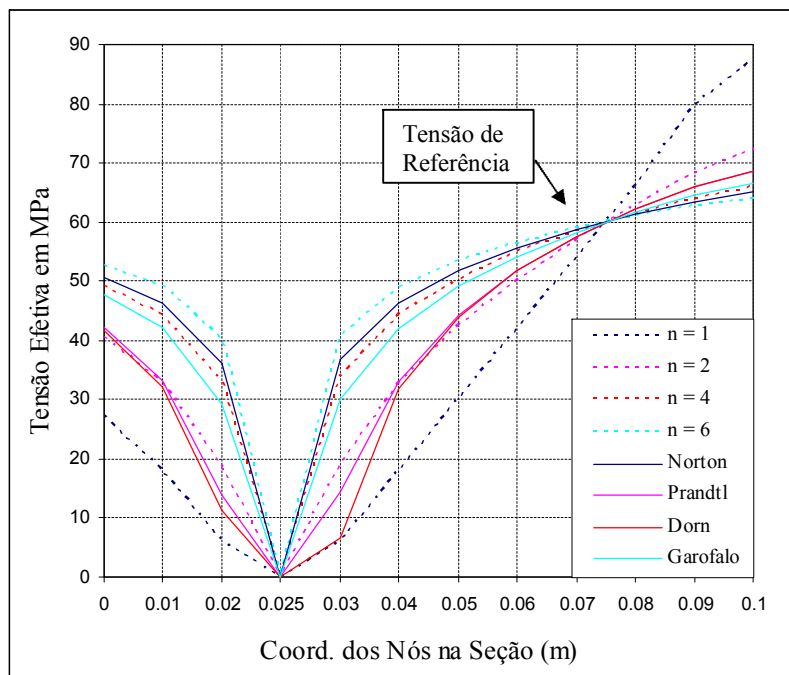
O segundo método sugerido por XUE e WANG (1995), considera somente a lei de Norton fazendo-se uma variação na constante n da fórmula proposta na equação (47). Para este caso, foram analisados resultados para $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ e $n = 6$. A tensão de referência é o ponto da interseção entre as curvas das tensões considerando os diferentes valores de n . Os resultados obtidos são apresentados no Gráfico 8, a seguir.

GRÁFICO 8 – COMPARAÇÃO ENTRE AS TENSÕES OBTIDAS PELAS LEI DE NORTON, PARA DIVERSOS VALORES DE n OBTENÇÃO DA TENSÃO EFETIVA



O Gráfico 9, a seguir mostra a sobreposição dos métodos anteriormente descritos. A tensão de referência como se pode observar no Gráfico 9 é cerca de 59 MPa, e está próxima do valor apresentado por XUE e WANG (1995), que é de aproximadamente 57 MPa.

GRÁFICO 9 – SOBREPOSIÇÃO DOS RESULTADOS



Pode-se observar, no Gráfico 9 onde se tem a superposição dos métodos, que ambos os métodos descritos para obtenção da tensão de referência conduzem ao mesmo valor de tensão. As soluções plotadas obtidas no modelo implementado pelas diversas leis de viscoelasticidade através do MEF, resultam na tensão de referência próximo ao valor obtido por XUE e WANG (1995).

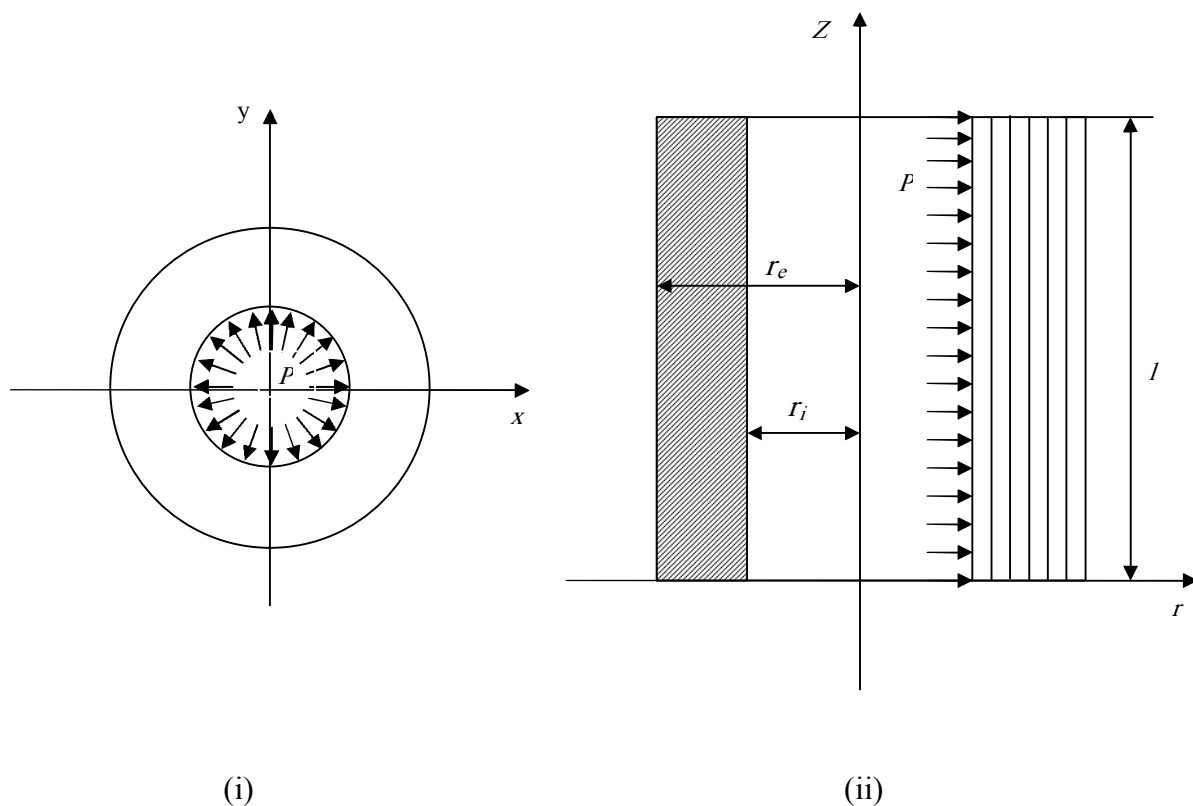
5.3 – PROBLEMA AXISSIMÉTRICO

Para este exemplo foi considerado um tubo espesso de raio interno r_i e raio externo r_e e comprimento l . Os parâmetros geométricos para o tubo são: $r_i = 10$ cm, $r_e = 20$ cm, $l = 50$ cm, conforme a Figura 20 (i).

Neste exemplo, o tubo foi submetido a uma pressão interna de $P = 100$ MPa. A análise foi feita considerando elementos isoparamétrico de 8 nós, distribuídos numa

malha de 6 elementos no sentido radial por 1 elemento no sentido longitudinal conforme mostra a Figura 20 (ii).

FIGURA 20 – GEOMETRIA E MALHA DO TUBO ESPESSO – PROBLEMA AXISSIMÉTRICO



Conforme XUE e WANG (1995) a incompressibilidade é introduzida por intermédio do fator de penalidade λ . Em problemas que envolvem incompressibilidade, a integração reduzida torna-se uma ferramenta que tem sido utilizada. Neste sentido a matriz de rigidez pode ser decomposta em duas partes: a primeira denotada por K_1 , que não leva em consideração o fator de penalidade, e segunda denotada por K_2 que considera o fator de penalidade.

Para se obter uma correta solução é necessário garantir a não singularidade de K_1 e a singularidade de K_2 [ZIENKIEWICZ (1980)]. Neste caso a sub-integração foi feito considerando dois pontos de Gauss.

O valor de λ também é um fator que interfere bastante no resultado. Segundo XUE e WANG (1995) este valor dever ser da ordem de 10^4 a 10^8 vezes maior que o maior valor dos elementos da matriz de rigidez.

O valor de λ adotado para este exemplo é da ordem de 10^6 vezes maior que o maior valor da matriz de rigidez.

As tensões radiais podem ser obtidas de forma analítica através da equação (208), segundo BOYLE (1983).

$$\sigma_r(r) = -P \frac{\left(\frac{r_e}{r}\right)^{2/n} - 1}{\left(\frac{r_e}{r_i}\right)^{2/n} - 1} \quad (208)$$

onde σ_r é o valor de tensão radial no ponto de coordenada r , P valor da pressão interna, r_e e r_i são os valores do raio externo e interno respectivamente, n constante do material Tabela (1).

Os resultados obtidos para este exemplo são apresentados na tabela (3), a seguir, e são comparados com a solução analítica e com a solução apresentada por XUE e WANG (1995).

TABELA 3 – RESULTADOS OBTIDOS PARA O PROBLEMA AXISSIMÉTRICO

| Tensão de <i>Creep</i> – σ_r | | | | | | |
|--|---------------------|----------|----------|-----------|------------------------------|---------------|
| Coord. Do raio (r) | Modelo Implementado | | | | Solução | Xue e Wang |
| Nós Ext. | Lei de | Lei de | Lei de | Lei de | Análítica Boyle (1983) | (1995) |
| Livre | Norton | Prandtl | Dorn | Garofallo | (1983) | Lei de Norton |
| (m) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) | (MPa) |
| 0,200 | -0,0023 | -0,00235 | -0,00236 | -0,00236 | 0,00 | -0,112 |
| 0,183 | -9,29 | -9,66 | -9,76 | -9,59 | -11,23 | -10,86 |
| 0,167 | -21,18 | -21,97 | -22,20 | -21,67 | -23,24 | -23,35 |
| 0,150 | -36,23 | -37,43 | -37,84 | -37,56 | -37,95 | -37,74 |
| 0,133 | -54,95 | -56,34 | -56,95 | -56,12 | -55,25 | -54,61 |
| 0,117 | -74,06 | -74,60 | -75,39 | -74,53 | -74,69 | -74,75 |
| 0,100 | -93,25 | -92,45 | -92,45 | -93,15 | -100,00 | -99,51 |

A seguir serão plotados os gráficos comparando a solução analítica, a solução pelo MEF do modelo implementado e a solução publicada por XUE e WANG (1995), para cada lei de *creep*.

GRÁFICO 10 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI NORTON, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

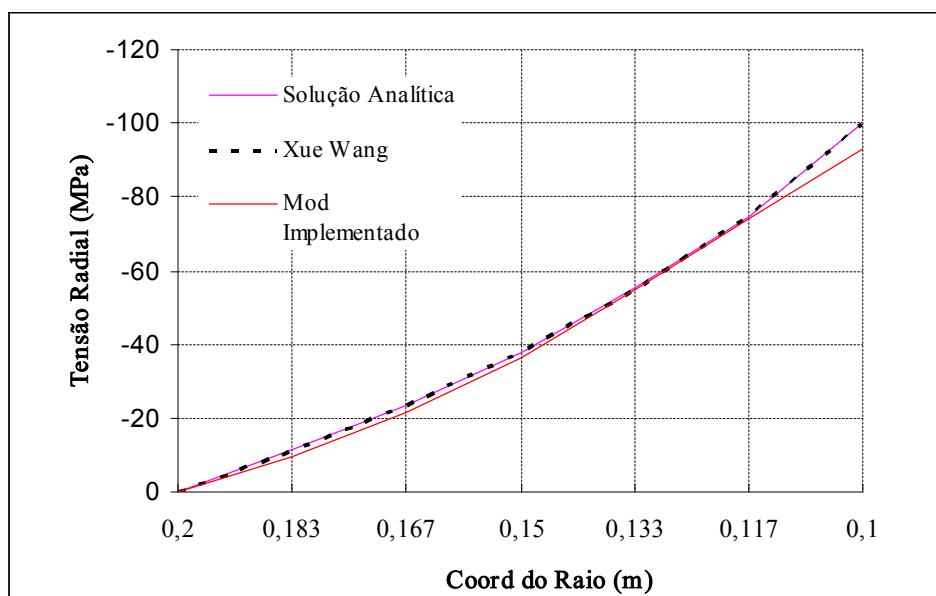


GRÁFICO 11 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI PRANDTL, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

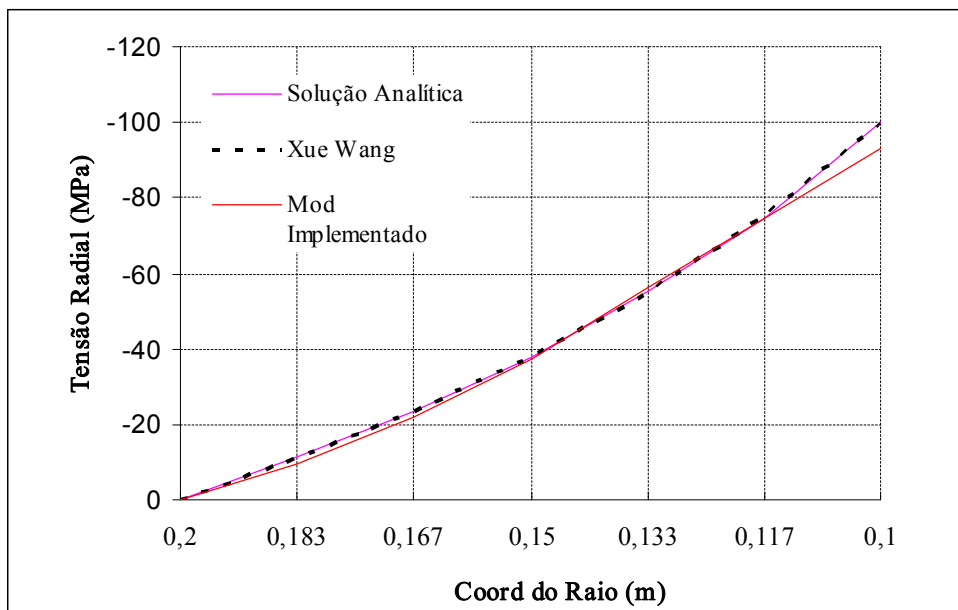


GRÁFICO 12 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI DORN, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG

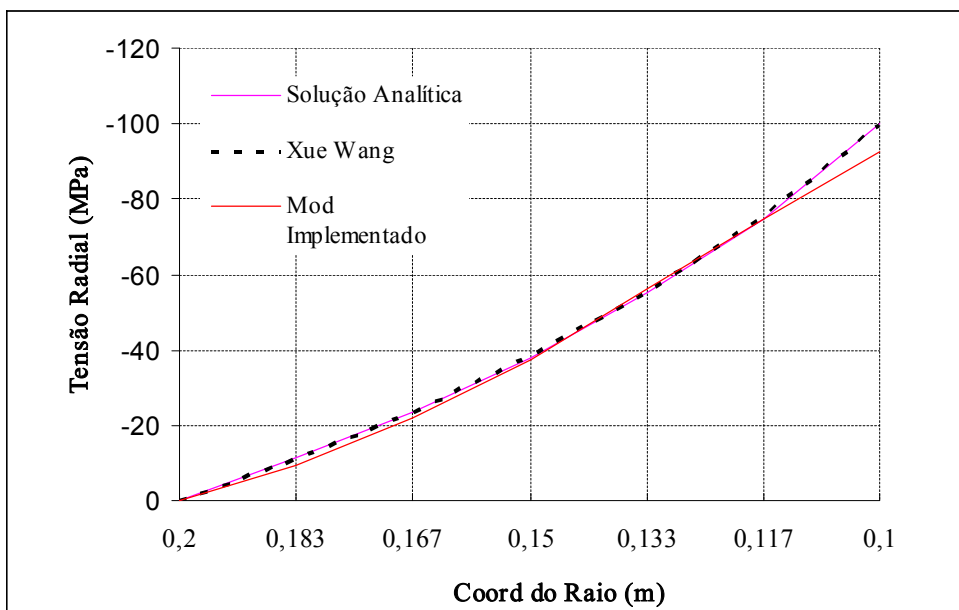
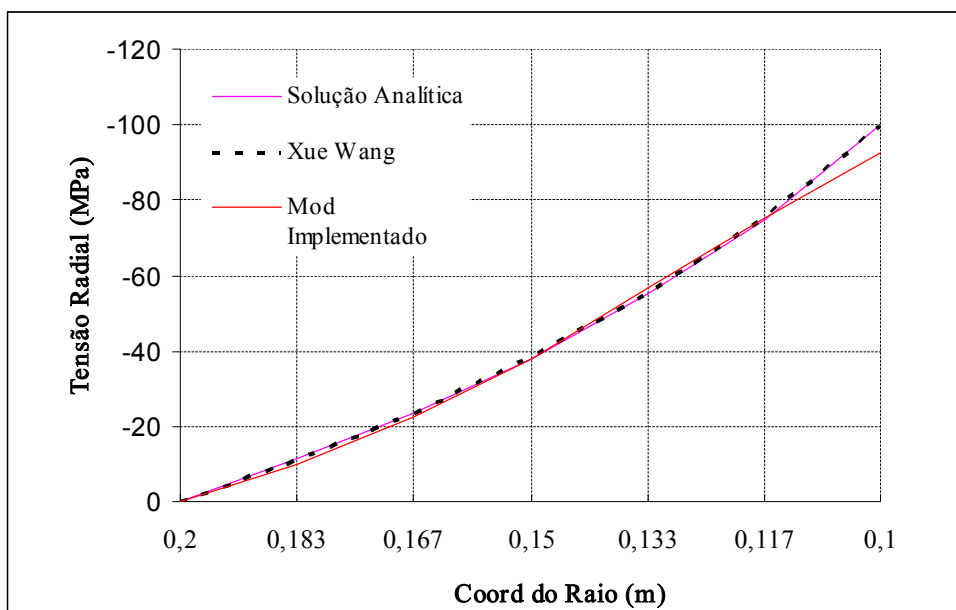


GRÁFICO 13 – COMPARAÇÃO ENTRE A TENSÃO OBTIDA PELA LEI GAROFALO, A SOLUÇÃO ANALÍTICA E O RESULTADO DE XUE E WANG



Os Gráficos (10) – (13) mostram um bom comportamento para as soluções aproximadas em relação a solução analítica em todos os casos. Observa-se que não há praticamente diferenças entre os modelos implementados, todos os resultados dos modelos implementados apresentam-se próximos aos da solução de XUE e WANG (1995), que por sua vez é praticamente coincidente com a solução analítica.

Nota-se que para todos os modelos implementados há um pequeno desvio na tensão para o raio interno. Acredita-se que este valor seja função do modelo de solução numérica implementado, porém por estar próxima da solução analítica, não compromete a validade do mesmo.

6- CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

No desenvolvimento deste trabalho foram apresentados diversos conceitos sobre o fenômeno de *creep*. Procurou-se trazer definições básicas da viscoelasticidade, apresentando-se os modelos reológicos para o *creep* (Kelvin, Maxwell e modelos generalizados), como as teorias de endurecimento por tempo transcorrido e por deformação (“Time Hardening” e “Strain Hardening Theory”) e formulações para *creep* uniaxial e multiaxial. Estes conceitos foram de fundamental importância para entendimento do fenômeno de *creep* do ponto de vista da formulação matemática.

Diversos conceitos da Mecânica do Contínuo foram abordados, todos eles são importantes para implementação numérica via MEF para solução do fenômeno de *creep*.

O Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema de *creep* mostra-se bastante eficiente, e pode ser facilmente implementado, uma vez observadas as formulações mostradas e seguindo as condições de equilíbrio necessárias para o problema.

Os exemplos numéricos apresentados são relativamente simples, e serviram para testar o modelo de solução via MEF e constatar a eficácia do método. O elemento isoparamétrico de 8 nós adotado na implementação do programa via MEF, apresenta uma boa resposta para as deformações e tensões. Estes valores são bastante importantes na fase inicial elástica, pois são eles que fornecem os dados iniciais para o processo iterativo da fase não linear.

A comparação da solução analítica com a solução aproximada pelo MEF, vista no exemplo 1, reflete a boa aproximação do MEF. Pode-se notar que dentre as diversas abordagens, na solução pela Lei de Dorn há um desvio relativamente alto, se comparado com as demais leis. Conforme o modo de obtenção da tensão de referência, para o exemplo 2, observa-se que as duas formas apresentadas refletem a mesma

tensão, demonstrando a consistência dos resultados obtidos.

Outro fator a considerar é o primeiro valor para tensão equivalente. Segundo XUE e WANG (1995), deve-se considerar a tensão inicial próxima a $2/3$ da tensão equivalente para o primeiro incremento. Em implementos numéricos, constata-se que para valores nesta ordem de grandeza a convergência torna-se mais rápida, comprovando ser este um bom valor para o início do processo não linear.

O terceiro exemplo apresenta a implementação utilizando a penalidade λ . Foram testados alguns valores diferentes dos parâmetros sugeridos por XUE e WANG (1995). Observou-se que para valores acima de 10^8 vezes maior que o valor médio da matriz de rigidez, o processo não converge para os resultados esperados. Para valores inferiores a 10^4 , os resultados para as tensões radiais são menores que os resultados obtidos pela solução analítica, isto porque a incompressibilidade não é implementada de forma correta.

Verificou-se também a validade do processo de integração reduzida, forma apresentada para impor a condição de incompressibilidade, o parâmetro adotado para λ foi da ordem de 10^6 vezes maior que o valor moderado da matriz de rigidez.

Observa-se nos três exemplos apresentados o bom comportamento das soluções aproximadas quando comparadas às soluções analíticas, e também o comportamento entre as diversas leis das viscoelasticidade apresentadas, o que valida a formulação via Método dos Elementos Finitos implementada.

O processo de solução não linear deve ser analisado com atenção, pois em função da formulação das matrizes de propriedades do material D_T , o custo computacional pode ser alto quando adotado o NR convencional, uma vez que neste método a matriz de rigidez deve ser atualizada a cada passo de iteração. Entretanto este custo torna-se mais baixo quando utilizado o mNR pois a matriz de rigidez K é mantida constante durante o processo de iteração, embora seja necessário um número maior de iterações.

Como sugestão para trabalhos futuros fica:

- Implementação de uma análise de *creep* na fase primária;
- Formulação de modelos que envolvem a plasticidade junto a fenômeno de *creep*;
- Formulação de modelos para análise de *creep* em estruturas de concreto;
- Implementação de modelos que envolvem variação de temperatura.
- Implementação utilizando elementos lagrangeanos de 9 nós ou com outros nós internos de forma a incorporar a condição de incompressibilidade nesses nós internos.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, E. N. The Viscous Flow in Metals and Allied Phenomena. **Proceedings of Royal Society**, Series A, v. 84, p 1, 1910*.
- BAILEY, R. W. Creep of Steel Under Simple and Compound Stresses and The Use of High Initial Temperatures in Steam Power Plants, Transactions. **Tokyo Sectional Meeting of the World Power Conference**, Tokyo, p 1089, 1929*.
- BATHE, K. J. e Snyder. M. D. A solution Procedure for Thermo-Elastic And Creep Problems. **Nuclear Engineering and Desing**, v. 64, p 49 – 80, 1980.
- BATHE, K. J. Finite Element Procedure in Enginnering Analysis. **Prentice_Hall**, Inc., Englewood Clifs. New Jersey, 1996.
- BOYLE, J.T. Aproximations In The Reference Stress Method For Creep Deseign. **Int. J. Mech. Sci.** v. 22, p 73 -82, 1979.
- BOYLE, J. T.; SPENCE, J. Stress Analysis for Creep. **Butterwoth**, London, 1983.
- CASSARA, P. G. – Análise não Linear Elastoplástica Com Fluência Pelo Método dos Elementos Finitos. **Dissertação de Mestrado**, Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1997.
- COOK, R. D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M. E. Concepts and applications of Finite Element Analysis, **John Wiley & Sons**, New York, 1988.
- FEIJOO, R. A.; TAROCO, E.; ZOUAIN, N. **Revista Brasileira de Ciências Mecânicas**, nº 2, v. IV, p. 25 -34, 1982.
- FEIJOO, R. A. ;TAROCO, E.; GUERREIRO, J. N. C.- Introduccion a Fluência, Curso de Mecânica Teórica e Aplicada - Teoria das Cascas e Suas Aplicações na Engenharia, Rio de Janeiro, Módulo II, LCC;CNPq, 1983.

- FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials. **Dover Publications, Inc.**, New York, , 1989.
- GRANDIN, H. Jr. Fundamentals of the Finite Element Method, **Macmillan Publishing Company**, New York, 1986.
- GUERREIRO, J. N. C. Novos Métodos de Elementos Finitos Mistos Para Análise Inelástica. **Tese de Doutorado**, Rio de Janeiro , R.J., COPPE/UFRJ, 1988.
- GREENBAUM. G. A; RUBISTEIN, M. F. Creep Analysis of Axisymmetric Bodies Using Finite Element. **Nuclear Eng. Design**, v. 7, p. 379 – 397, 1968**.
- HALBRITTER, A. L. Aplicação do Método dos Elementos Finitos à Análise do Comportamento Reológico Estrutural. **Tese de Doutorado**, Rio de Janeiro , R.J., COPPE/UFRJ , 1977.
- HAUPT. P. Some Comments on Thermomechanical Constitutive Equations for Inelastic Analysis of LMFBR Components. **4ª. Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology**, San Fransisco, 1977.
- HUDDLESTON, R. L. An Improved Multiaxial Creep-Rupture Strength Criterio. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 107, p. 421 – 429, 1985.
- KRAUS, H. Creep Analysis. **John Wiley**, New York, 1980.
- LUDWIK, P. Elemente der Technologischen Mechanik. **Springer**, Berlin, 1909*.
- MUNOZ, G. C. S. Análise Numérica de Problemas de Fluência. **Tese de Doutorado**, UFRJ – Instituto de Matemática, 1993.
- NADAI, A. On the Creep of Solids at Elevated Temperatures. **Journal of Applied Physics**, v. 8, p 418, 1937*.
- NORTON, F. H. The Creep Of Steel at High Temperature. **McGraw Hill**, New York, 1929*.

- ODQVIST, F. K ; HULT, J. Creep Strength of Metallic Materials. **Springer**, Berlin, 1962*.
- ODQVIST, F. K. IUTAM symposium on Creep in Structures, Gothenburg 1970, **Jean Hult**, Springer Verlag, 1972.
- PRANDTL, L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 8, p. 85, 1928*.
- SANTOS, H. C. Análise de Estruturas Aperticadas de Concreto Armado e Protendido com a Consideração da Deformação Lenta. **Dissertação de Mestrado**, São Paulo, SP, Escola Politécnica da USP, Departamento de Estruturas e Fundações, 2001.
- SARDON, J. A. L. Análise Não-Linear Física (Elasto-Plástica com Fluência) e Geométrica Empregando o Método dos Elementos Finitos. **Dissertação de Mestrado**, Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1994.
- SHARIYAT, M.; ESLAMI, M. R. Isoparametric Finite-element Thermoelasto-Plastic Creep Analysis of Shells of Revolution. **Int. J. Pres. Ves & Piping**, v.68, p. 249 - 259, 1996.
- SESHADRI, R. The Effect of Multiaxiality and Follow-Up on Creep Damage. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 112, p. 378 -385, 1990.
- SEVERUD, L. K. Creep-Fatigue Assessment Methods Using elastic Analysis Results and Adjustments. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 113, p. 34 – 40, 1991.
- SODERBERG, C. R. The Interpretation of Creep Tests for Machine Design. **Transaction of ASME**, v. 58, p. 733, 1936*.
- THURSTON, R. H. Materials of Construction. **John Wiley**, New York, 1895
- VICAT, L. T. Note Sur l'Allongement du Fil de Fer Soumis à Diverses Tensions. **Annales, Ponts et Chaussées**, Memoires e Docum. v. 7, 1834*.

- XUE, G.; WANG, X. C. General Steady Creep Analysis for Various Constitutive Laws. Part 1: theory and formulation, **Int. J. Pres. Ves. & Piping**, v. 64, p. 119 – 125, 1995(a).
- XUE,G.; WANG, X. C. General Steady Creep Analysis for Various Constitutive Laws. Part 2: - Application and numerical examples in two-dimensions. **Int. J. Pres. Ves. & Piping**, v. 64, p. 127 – 136, 1995(b).
- ZIENKIEWICZ, O. C. El Método de Los Elementos Finitos, **Reverté**, S.A, Barcelona, 1980.
- WANG, X. N.; WANG, X. C. Finite element stress analysis for steady creep. **Int. J. Pres. Ves. & Piping**, v. 57, p.289 – 295, 1994(a).
- WANG, X. N.; WANG, X. C. Simplified analysis for creep stress redistribution of high temperature structures using some finite element results. **Int. J. Pres. Ves. & Piping**, v. 58, p. 295 – 302, 1994(b).
- WINEMAN, Alans S; RAJAGOPAL, K. R. Mechanical Reponse of Polymers, an Inrtodution. **Cambridge University Press**, 2000.