

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEÔNIA GABARDO NEGRELLI

**UMA RECONSTRUÇÃO EPISTEMOLÓGICA
DO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA
PARA A EDUCAÇÃO (EM) MATEMÁTICA**

CURITIBA

2008

LEÔNIA GABARDO NEGRELLI

**UMA RECONSTRUÇÃO EPISTEMOLÓGICA
DO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA
PARA A EDUCAÇÃO (EM) MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Educação, na linha de pesquisa Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

CURITIBA
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS
COORDENAÇÃO DE PROCESSOS TÉCNICOS

Negrelli, Leônia Gabardo

Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática / Leônia Gabardo Negrelli. – Curitiba, 2008. 94f.

Inclui bibliografia

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Cifuentes

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Modelos matemáticos. I. Cifuentes, José Carlos. II. Universidade Federal do Paraná. Setor de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDD 511.8



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO



PARECER

Defesa de Tese de **LEÔNIA GABARDO NEGRELLI** para obtenção do Título de DOUTORA EM EDUCAÇÃO. Os abaixo-assinados: DR. JOSÉ CARLOS CIFUENTES, DR^a JUSSARA DE LOIOLA ARAÚJO, DR. DALE WILLIAM BEAN, DR^a LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA e DR. ADONAI SCHLUP SANT'ANNA argüiram, nesta data, a candidata acima citada, a qual apresentou a seguinte Tese: **"UMA RECONSTRUÇÃO EPISTEMOLÓGICA DO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO (EM) MATEMÁTICA"**.

Procedida a argüição, segundo o Protocolo aprovado pelo Colegiado, a Banca é de Parecer que a candidata está apta ao Título de DOUTORA EM EDUCAÇÃO, tendo merecido as apreciações abaixo:

BANCA	ASSINATURA	APRECIÇÃO
DR. JOSÉ CARLOS CIFUENTES		APROVADA
DR ^a JUSSARA DE LOIOLA ARAÚJO		APROVADA
DR. DALE WILLIAM BEAN		APROVADA
DR ^a LOURDES MARIA WERLE DE ALMEIDA		APROVADA
DR. ADONAI SCHLUP SANT'ANNA		APROVADA

Curitiba, 30 de maio de 2008

Prof^a Dr^a Maria Tereza Carneiro Soares
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação

Para minha filha Marcela,
com o desejo de que suas "leituras" sempre
lhe propiciem sabedoria e felicidade.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida e luz que sempre me guia por caminhos que levam ao crescimento e à superação.

Ao Prof. Dr. José Carlos Cifuentes, pela orientação e amizade, e à sua esposa Prof^a. Dr^a. Blanca Beatriz Diaz Alva, pelo incentivo e amizade.

Ao meu amado esposo Marcelo Aurélio Dombek, amigo, incentivador e companheiro de todas as horas.

À minha mãe Eugênia Bossi Gabardo, pelo exemplo de vida e pelo auxílio que possibilita o desempenho de todos os meus papéis.

À Marlene Perez, pela amizade e companheirismo.

Aos amigos e familiares que comigo conviveram no decorrer do curso de doutorado, pelo apoio, incentivo e compreensão.

Aos professores membros da banca de defesa: Dr^a. Jussara de Loiola Araújo (UFMG), Dr. Dale William Bean (UFOP), Dr^a. Lourdes Maria Werle de Almeida (UEL), Dr. Adonai Schlup Sant'Anna (UFPR), Dr. Alexandre Kirilov (UFPR) e Dr. Dionísio Burak (UNICENTRO), pelas contribuições dadas. À Prof^a. Dr^a. Jussara de Loiola Araújo (UFMG) e ao Prof. Dr. Dionísio Burak (UNICENTRO) agradeço também pelas contribuições dadas como membros da banca de qualificação.

Às Faculdades FACET-PR pelo apoio e incentivo.

A todos os professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPR que me auxiliaram de alguma forma na realização deste estudo.

RESUMO

Neste estudo abordamos aspectos filosófico-epistemológicos e matemáticos subjacentes a uma interpretação do processo de modelagem matemática na educação matemática. Para o seu desenvolvimento pomos em relevo o caráter interdisciplinar da educação matemática e destacamos a modelagem matemática como uma atividade que pressupõe interdisciplinaridade. Destacamos o componente realidade em descrições do processo de modelagem matemática e fazemos uma análise epistemológica desse componente, o que resulta numa releitura do referido processo. Propomos uma fundamentação filosófico-epistemológica dessa releitura valendo-nos de concepções filosóficas da ciência como realismo, estruturalismo e empirismo. Isso nos conduz a uma visão da matemática de caráter pluralista no processo de modelagem matemática, isto é, uma concepção na qual a concepção de matemática é relativizada. Propomos uma adaptação por analogia do processo de modelagem matemática a situações nas quais a realidade que se pretende modelar é a própria matemática. Por meio deste estudo visamos obter uma melhor compreensão do processo de modelagem matemática, da matemática envolvida nesse processo, bem como do papel da modelagem no ensino e na aprendizagem de matemática.

Palavras-Chave: Educação Matemática, Modelagem Matemática, Epistemologia, Realidade.

ABSTRACT

In this study we approach underlying philosophic-epistemological and mathematical aspects of an interpretation of mathematical modelling process in mathematics education. For its development we put in high relief the interdisciplinary character of mathematics education and we emphasize mathematical modelling as an activity that presupposes interdisciplinarity. We point out the component reality in descriptions of mathematical modelling process and make an epistemological analysis of this component, which results in a rereading of the related process. We propose a philosophic-epistemological foundation of this rereading, considering philosophical conceptions of science as realism, structuralism and empiricism. This leads us to a vision of mathematics of pluralist character in mathematical modelling process. That is, a conception in which the conception of mathematics is relativised. We propose an adaptation, by the analogy of mathematical modelling process, to situations in which the reality that is intended to be modelled is the mathematics itself. By means of this study we aim to get a better understanding of mathematical modelling process, of the involved mathematics in this process, as well as of the role of modelling in the instruction and the learning of mathematics.

Keywords: Mathematics Education, Mathematical Modelling, Epistemology, Reality.

RÉSUMÉ

Dans cette étude nous abordons des aspects philosophiques-épistémologiques et mathématiques sous-jacents à une interprétation du processus de modélisation mathématique dans l'éducation mathématique. Pour son développement nous mettons en relief le caractère interdisciplinaire de l'éducation mathématique et nous soulignons la modélisation mathématique comme une activité qui présuppose l'interdisciplinarité. Nous soulignons le composant réalité dans des descriptions du processus de modélisation mathématique et nous faisons une analyse épistémologique de ce composant, ce qui résulte dans une relecture du processus mentionné. Nous proposons des fondements philosophiques épistémologiques pour cette relecture en nous servant de conceptions philosophiques de la science telles que le réalisme, le structuralisme et l'empirisme. Cela nous conduit à une vision de la mathématique à caractère pluraliste dans le processus de modélisation mathématique, c'est-à-dire une conception dans laquelle la conception de mathématique est relativisée. Nous proposons une adaptation par analogie du processus de modélisation mathématique à des situations où la réalité qu'on prétend modéliser est la mathématique elle-même. Au moyen de cette étude, on envisage à obtenir une meilleure compréhension du processus de modélisation mathématique, de la mathématique impliquée dans ce processus, aussi bien que du rôle de la modélisation dans l'enseignement et dans l'apprentissage de la mathématique.

Mots-clés: Education mathématique, Modélisation mathématique, Epistémologie, Réalité.

SUMÁRIO

Apresentação	01
Capítulo 1 - Introdução	04
1.1 A Educação Matemática e seu Caráter Interdisciplinar	04
1.2 Uma Visão da Modelagem Matemática na Educação Matemática	10
1.3 Questões Norteadoras e Objetivos	17
1.4 Uma Justificativa Pessoal	18
Capítulo 2 - A Realidade no Processo de Modelagem Matemática	21
2.1 Algumas Etapas do Processo de Modelagem Matemática	21
2.2 A Realidade em Estudos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática	28
2.3 Uma Caracterização do Componente Realidade no Processo de Modelagem Matemática	34
2.4 Releitura do Processo de Modelagem Matemática	39
Capítulo 3 - Uma Fundamentação Filosófica da Releitura do Processo de Modelagem Matemática	44
3.1 Pressuposições Filosóficas	44
3.2 Realismo e Verdade	46
3.3 Estruturalismo e Realidade Intermediária	50
3.4 Os Modelos e a Adequação Empírica	54
3.5 Uma Visão Empirista do Processo de Modelagem Matemática	59
3.6 Sobre a Relação entre Verdade e Linguagem	61
Capítulo 4 - Modelagem Matemática no Interior da Própria Matemática ...	65
4.1 A Matemática como Realidade Inicial no Processo de Modelagem Matemática	66
4.2 O Método Axiomático e as Estruturas	67
4.3 Exemplos de Modelagem Matemática no Interior da Própria Matemática ...	74
4.4 A Matemática como Ciência Empírica à Luz do Processo de Modelagem Matemática	77
Capítulo 5 - Considerações Finais	86
Referências Bibliográficas	89

APRESENTAÇÃO

Desenvolvemos este estudo como trabalho de conclusão do Curso de Doutorado em Educação, da Universidade Federal do Paraná (UFPR), na linha de pesquisa *Educação Matemática*. Nele abordamos aspectos filosóficos, especialmente epistemológicos, e matemáticos subjacentes a uma interpretação do processo de modelagem matemática na educação matemática motivada por uma análise do componente 'realidade' nesse processo. Entendemos que uma discussão desses aspectos, principalmente referente ao componente destacado, pode trazer uma melhor compreensão do processo de modelagem matemática, processo que visa à aquisição do conhecimento matemático, da matemática envolvida nesse processo, bem como do papel da modelagem no ensino e na aprendizagem de matemática.

Quando falamos em ensino e aprendizagem sabemos que em cada nível, no ensino fundamental, no ensino médio, na formação de professores, nos cursos de formação continuada, pode haver uma forma distinta, mais adequada, para abordar a modelagem matemática. Portanto, é legítimo falarmos em concepções de matemática, pressupostos filosóficos e análises epistemológicas apoiadas nas diversas formas de se fazer modelagem matemática nos referidos níveis. Em função disso, elaboramos este texto pensando que sua leitura será útil principalmente a estudantes de cursos de graduação que visam a formação de professores de matemática para atuarem em qualquer nível, da educação infantil à pós-graduação, professores desses cursos e demais interessados em matemática e em educação matemática e, de modo especial, aos interessados numa discussão dos fundamentos epistemológicos e matemáticos da modelagem matemática.

Entendemos por *fundamentos* as razões e as teorias por meio das quais podemos explicar e justificar concepções, procedimentos e atitudes adotados. Essa visão remete à doutrina aristotélica segundo a qual os fundamentos estão associados às causas, entendidas como a razão de ser das coisas. Essa “causa-ração [...] expressa a necessidade do ser enquanto substância”, conforme (ABBAGNANO, 2003, p. 475). Entendemos por *epistemologia* a teoria da ciência moderna, ou, mais especificamente, a teoria do conhecimento científico; ciência

essa que se baseia na contraposição entre análise e síntese, caracterizando o método científico nos moldes de Newton.

A seguir expomos a forma como este texto está organizado.

No primeiro capítulo apresentamos nosso objeto de estudo e o ponto de vista do qual abordamos as questões norteadoras que utilizamos para investigá-lo. Para tanto, pomos em relevo o caráter interdisciplinar da educação matemática e a relevância de se conhecer formas de manifestação desse caráter em propostas pedagógicas que visem o ensino e a aprendizagem de matemática em qualquer nível. Destacamos a modelagem matemática como um possível elemento constituinte de tais propostas. Na seqüência, apresentamos as referidas questões norteadoras e os objetivos específicos traçados a partir delas, finalizando com uma justificativa pessoal para a realização deste estudo.

No segundo capítulo apresentamos descrições do processo de modelagem matemática, inspiradas pela forma como ele é concebido pela matemática aplicada, ou seja, como método científico de pesquisa. Destacamos dessas descrições um componente que normalmente figura em justificativas para o emprego de modelagem matemática na educação matemática: a realidade a ser modelada. Apresentamos alguns estudos sobre modelagem na educação matemática que contemplaram a questão da realidade em suas análises, terminando com uma abordagem epistemológica do componente realidade no processo de modelagem matemática, na qual explicitamos uma maneira de conceber esse componente, como constituído notoriamente de uma realidade inicial e uma realidade intermediária, o que nos levou a uma releitura do referido processo. Com essa releitura revelamos importantes facetas do componente realidade, não exploradas em leituras usuais do processo de modelagem matemática, e que podem ser essenciais quando se toma o ensino e a aprendizagem de matemática como objetivo da modelagem matemática.

No terceiro capítulo propomos uma fundamentação filosófica da releitura que fizemos no capítulo anterior, destacando seus aspectos epistemológicos e ontológicos. Para tanto, valemo-nos de concepções filosóficas da teoria da ciência como realismo, estruturalismo e empirismo, que adaptamos a diversas etapas do processo de modelagem matemática e que nos conduzem a uma visão da matemática de caráter pluralista, isto é, na qual a concepção de matemática é relativizada, no processo de modelagem matemática.

O quarto capítulo traz nossa principal contribuição: considerando a releitura do processo de modelagem matemática tradicional, do matemático aplicado, que parte de situações não matemáticas para serem modeladas, propomos uma adaptação por analogia a situações nas quais a realidade que se pretende modelar, a realidade inicial, seja a própria matemática, permitindo uma abordagem empírica dessa ciência. Por meio de exemplos discutimos como pode se dar a constituição da realidade intermediária, entendendo que esta é uma tarefa característica do processo de modelagem matemática. Nesse contexto vemos que a noção de 'experiência matemática' adquire significado pleno.

No quinto e último capítulo, como considerações finais, apresentamos uma reflexão sobre a trajetória percorrida no desenvolvimento deste estudo juntamente com algumas questões suscitadas por ele e que podem demandar novas pesquisas.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. A Educação Matemática e seu Caráter Interdisciplinar

A Educação Matemática tem se revelado um campo de diálogo, parceria e interação entre diferentes áreas do conhecimento como a filosofia, a lingüística, a epistemologia, a psicologia, a sociologia, a pedagogia, a história, a antropologia, dentre outras, todas contribuindo na busca de um tratamento cada vez mais adequado da matemática no campo educacional.

Naturalmente, entre os objetivos e resultados que se espera de uma educação (em) matemática, em seus diversos níveis, está a sua contribuição para a formação do cidadão no que concerne a aspectos relativos às áreas do conhecimento referidas acima. Mas, como um dos objetivos específicos da educação (em) matemática, que não pode ser delegado a nenhuma dessas outras áreas, está uma adequada formação matemática do indivíduo.

Diante da variedade de eixos temáticos e de pesquisas alocadas nesses eixos produzidas no Brasil e que contemplam questões relativas ao ensino e à aprendizagem de matemática, notamos que o espaço promovido pela Educação Matemática para o diálogo com outras áreas do conhecimento também tem contribuído para que a matemática não seja considerada (ou reconhecida) como um objeto central, como elemento diferenciador dessa grande área. Em geral, a matemática considerada em muitas dessas pesquisas é aquela proposta ou estabelecida nos currículos, programas de disciplinas, livros didáticos, dando a impressão de que a matemática é sempre dada, não cabendo uma discussão sobre a sua natureza, sobre seus métodos e conceitos, sobre a possibilidade de concepções alternativas dela.

Não se trata de negar a contribuição e o enriquecimento que as outras áreas trazem para a educação matemática. Quando mencionamos a variedade de eixos temáticos não vemos nisso um fator negativo. Mesmo porque, na atualidade, como

veremos a seguir, não podemos tratar a matemática deslocada de ou superior a outros campos do conhecimento. Mas também temos que ter o cuidado de não deixá-la tão diluída em estudos que se enquadrem no âmbito da Educação Matemática, a ponto de sua identificação se tornar difícil ou imperceptível, porque sua própria consideração consciente apresenta-se duvidosa. Sob o guarda-chuva da Educação Matemática muitos podem se abrigar, desde que a própria matemática não fique de fora, quando na realidade caberia a ela a função de sustentação.

Diante desse contexto, uma forma propícia de interação de diversas áreas na Educação Matemática, visando a construção do conhecimento matemático, entre outros tipos de conhecimento de igual relevância, é a interdisciplinaridade, que tem se revelado como elemento central dos processos de ensino e aprendizagem, principalmente na sociedade atual, na qual a complexidade é relevante. Logo, a Educação Matemática tem, entre suas tarefas, contribuir para a promoção, o conhecimento, a valorização da natureza interdisciplinar das áreas que a integram, incluindo a própria matemática.

A partir de um estudo sobre o conceito de interdisciplinaridade, Leis (2005) ressalta que o ensino e a pesquisa na sociedade contemporânea precisam ter como condição fundamental a interdisciplinaridade, que “tem a ver com a procura de um equilíbrio entre a análise fragmentada e a síntese simplificadora, assim como entre as visões marcadas pela lógica racional, instrumental e subjetiva.” (p.1). De fato, interdisciplinaridade envolve sínteses e não apenas superposições. Tomada no campo da Educação Matemática precisa ser mais do que “associações entre conteúdos matemáticos e diversos outros, como biológicos, químicos, físicos, sociais” (MALHEIROS, 2004, p. 23). Como bem colocou Fazenda (2001), a interdisciplinaridade envolve a interpenetração de uma área na outra.

A interdisciplinaridade envolve uma forma diferenciada de pensar acerca das questões que se apresentam. Nela elementos tradicionalmente reconhecidos como pertencentes a uma determinada área animam atitudes que conferem significados que não seriam possíveis por outra via. A possibilidade de pensar historicamente ou filosoficamente sobre a matemática, ou de pensar matematicamente sobre questões físicas, artísticas ou históricas, é uma forma de manifestação do caráter interdisciplinar imanente à própria construção do conhecimento pela humanidade. Em Cifuentes, Negrelli e Estephan (2001) podemos ver como o pensar

historicamente a matemática revelou-nos alguns de seus componentes estéticos¹. De fato, a interdisciplinaridade é uma forma de pensar sobre, é uma atitude diante de, o conhecimento.

Para nós, a qualificação de uma área do conhecimento como interdisciplinar implica a existência de uma dupla aplicação, de uma espécie de fusão, no sentido de que uma área traz condições para uma re-significação de elementos da outra área e vice-versa, não havendo subordinações. Sob essa visão, por exemplo, a Educação Matemática não pode ser vista como uma subárea, seja da Matemática, da Educação ou de outra qualquer, mas como o resultado de um esforço e de um empreendimento interdisciplinar.

A partir desse ponto de vista, ressaltamos que, diferentemente de procurar autonomia, a Educação Matemática precisa se empenhar por fundamentar sua interdisciplinaridade, o que não se dará somente pelas aplicações da matemática que são feitas em outros campos do conhecimento, mas envolve também a aplicação de outros campos na matemática, promovendo um modo de pensar e agir que a interdisciplinaridade incita. Principalmente porque, como bem coloca Ruiz (2006, p. 5), “o conhecimento e suas crescentes aplicações à sociedade e o mundo transformam seus domínios e fazem dissipar as fronteiras clássicas das disciplinas intelectuais”.

Naturalmente, essa visão de interdisciplinaridade prescinde de, ou antecede a, uma disciplinarização da Educação Matemática, disciplinarização que lhe atribuiria o caráter de “um campo autônomo de investigação e de formação profissional, institucionalmente legitimado, topologicamente diferenciado no interior do espaço acadêmico e juridicamente estabelecido”. (MIGUEL et al., 2004, p. 82), embora uma tal disciplinarização traga elementos positivos e necessários do ponto de vista político, econômico, social e burocrático, entre outros.

Podemos também encontrar um caráter interdisciplinar ao interior da própria Matemática ao longo de sua história. O advento da geometria analítica, no século XVIII, pode ser visto como resultado de uma ação interdisciplinar, pois envolve as antigas áreas álgebra e geometria, gerando uma nova. Não se trata de somente juntar conceitos das duas áreas. A interdisciplinaridade envolve um modo

¹ Nesse artigo são destacadas diferenças essenciais entre as formas axiomáticas de apresentação da geometria dadas por Euclides (séc. III a.C.) e Hilbert (séc. XIX). Uma delas é a importância teórica dos aspectos visuais da axiomática de Euclides que são desconsiderados na axiomática de Hilbert.

diferenciado de abordar uma área do conhecimento utilizando elementos típicos de outra.

Descartes e Fermat, por exemplo, aplicaram a álgebra na geometria propiciando uma abordagem algébrica para problemas geométricos e aplicaram geometria na álgebra, o que resultou num olhar geométrico sobre problemas algébricos. Essa prática envolveu o modo de pensar interdisciplinar colocado anteriormente.

Um exemplo de como esse modo interdisciplinar de pensar pode se manifestar na matemática é a questão de se provar que o seguinte sistema de equações tem solução:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= a, \quad a \neq 0 \\ 2xy &= b, \quad b \neq 0\end{aligned}$$

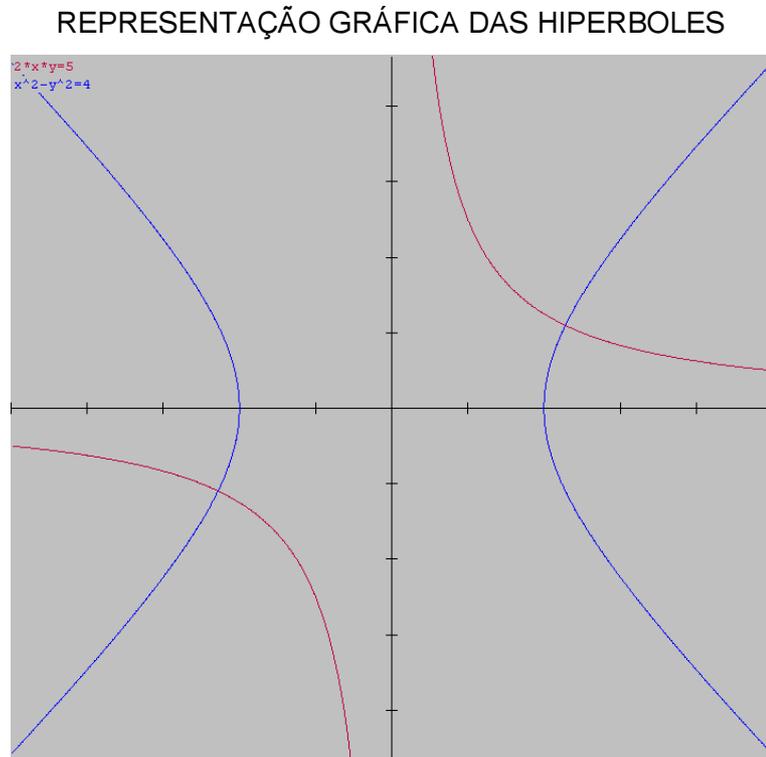
O sistema acima pode ser obtido, por exemplo, a partir do interesse em se encontrar a raiz quadrada de um número complexo $c = a + i.b$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

A solução procurada será um outro número complexo na forma $c = x + i.y$ de modo que $\sqrt{a + i.b} = x + i.y$. Com isso temos um problema de natureza algébrica, cuja solução nos conduz ao sistema acima mencionado:

$$\begin{aligned}\sqrt{a + i.b} &= x + i.y \\ a + i.b &= (x + i.y)^2 \\ a + i.b &= x^2 + 2x.y.i + i^2.y^2 \\ a + i.b &= (x^2 - y^2) + 2x.y.i \\ \text{ou seja, } a &= x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad b = 2x.y.\end{aligned}$$

No entanto, partindo desse sistema de equações, que representa o problema proposto podemos, a partir de uma re-significação de seus elementos, buscar uma solução geométrica. Ou seja, temos um problema algébrico que também pode ser interpretado geometricamente para o que há a necessidade de uma re-significação dos elementos envolvidos. Representando graficamente essas equações e

identificando seus pontos de interseção, pares ordenados de números reais, temos que os mesmos representam as soluções procuradas para o problema colocado, conforme sugere a figura a seguir.



O que temos então são duas equações cujas representações geométricas resultam em duas hipérboles que se interceptam em quadrantes opostos. Tais pontos de interseção, devidamente interpretados através de suas coordenadas numéricas, representam as soluções procuradas. Mais o que isso, a representação geométrica de um problema algébrico mostra-nos, por meio de uma visualização, processo próprio da geometria, que um sistema sempre terá duas soluções, isto é, um número complexo terá sempre duas raízes quadradas.

Um outro exemplo interessante seria o de ‘achar’ a tangente a um círculo por um ponto dado. Uma solução geométrica pode ser obtida com o auxílio de uma régua e um compasso, ou um *software* apropriado, e traçando uma perpendicular ao raio no ponto dado. Algebricamente também podemos encontrar a equação da reta tangente ao círculo naquele ponto.

Reparemos que o conceito de geométrico de reta é re-significado na álgebra, como equação do primeiro grau em duas variáveis, e vice-versa. A re-significação dos conceitos envolvidos nesses dois exemplos pressupõe a conceitualização dos

mesmos em diferentes áreas do conhecimento, nesse caso, diferentes áreas da própria matemática. Essa conceitualização noutra área implica na formulação do conceito utilizando a linguagem convencionada nessa área. Nos dois casos apresentados, a linguagem algébrica e a geométrica. A transição, e mesmo a interação entre linguagens, envolve habilidades que são típicas da atitude interdisciplinar mencionada antes.

Notemos que para que a interdisciplinaridade ocorra é preciso um refinamento da linguagem para que diferentes áreas se comuniquem. Para o caso da geometria analítica necessitou-se de uma linguagem algébrica adequada, para o que contribuiu Viète em finais do século XVI. Sem essa linguagem não seria possível o desenvolvimento dessa área da matemática.

Por outro lado, uma das manifestações da interdisciplinaridade é a introdução de conceitos novos que não seriam possíveis sem essa fusão. No caso da geometria analítica, por exemplo, falar de uma figura geométrica orientada não seria possível sem fundir geometria e álgebra.

Para realizar as ampliações de linguagem necessárias de modo a promover a interdisciplinaridade no ensino e na aprendizagem de matemática não há como não ressaltar o papel fundamental da boa formação matemática e geral do professor de matemática. Embora discutir a formação de professores não seja objetivo deste estudo faremos algumas colocações a esse respeito uma vez que esperamos que este texto possa ser do interesse daqueles professores que objetivem seu aperfeiçoamento.

Na Educação Matemática também podemos encontrar essa atitude interdisciplinar. Subáreas atuais da Educação Matemática que vêm se constituindo como disciplinas, como psicologia da educação matemática, filosofia da educação matemática, etnomatemática, tiveram sua origem por um processo interdisciplinar, re-significando fenômenos que não seriam compreendidos de tal forma.

Discutindo o papel da educação matemática, Ruiz (2006) relembra-nos que atualmente a amplitude e a complexidade dos conhecimentos obrigam um repensar de currículos, recursos didáticos e humanos e, sobretudo, do papel dos professores. De modo especial, os cursos de formação de professores, precisam se adaptar a uma nova perspectiva que

aponta a uma reforma profunda das estruturas universitárias, e dos departamentos rígidos e estancos, para uma visão que enfatiza a multidisciplinaridade, a interdisciplinaridade e a transdisciplinaridade. [...] mais que sobredimensionar as fronteiras teóricas ou práticas nas novas profissões ou disciplinas, trata-se de buscar conscientemente um concurso transdisciplinar. Isto se aplica de maneira particular à Educação Matemática. (RUIZ, 2006, p.5-6, tradução nossa).

Diante desse tipo de demanda acerca da formação atual de professores, podemos nos perguntar: Que formação de matemática se espera de um professor de matemática? Mais ainda, que visão de matemática se espera de um professor de matemática e (porque não acrescentar) de um matemático profissional?

Para uma discussão sobre o tipo de formação de professores que se espera que a legislação para os cursos de licenciatura defenda, Miguel et al. (2004, p.92,) sugere como ponto de apoio

o estabelecimento da concepção de que a matemática não é um conjunto de objetos que suportam tratamentos distintos, mas um conjunto de práticas sociais determinadas exatamente por esses tratamentos dos supostos 'objetos matemáticos'. É esse princípio que, ao menos aparentemente, em nossa comunidade, tem permitido o surgimento de expressões como 'a matemática dos matemáticos' ou 'a matemática do professor de matemática'.

A partir das considerações que fizemos acerca da Educação Matemática como área interdisciplinar e da formação matemática de professores como um ponto de convergência dessa interdisciplinaridade, destacamos a necessidade de se buscar conhecer propostas pedagógicas que favoreçam a prática dessa interdisciplinaridade. Acreditamos que a modelagem matemática é uma delas. Por isso faremos a seguir algumas considerações acerca da modelagem matemática na educação matemática.

1.2. Uma Visão da Modelagem Matemática na Educação Matemática

Muitas pesquisas realizadas no Brasil e em outros países sobre modelagem matemática na Educação Matemática estão voltadas para questões ligadas à sala de aula. Não são raros os estudos de campo que envolvem planejamento, execução e/ou análise de práticas que tomam como referência uma descrição da modelagem

composta por etapas e que, dependendo do objetivo almejado, recebe encaminhamentos variados. Por exemplo, pode partir de questões colocadas pelo professor, indicadas pelos alunos ou de questões suscitadas por algum acontecimento marcante para a nação; pode ainda ser orientada por temas extraídos da lista de conteúdos a serem trabalhados na própria disciplina de matemática. O foco dessas pesquisas ora está na ação do professor, ora na ação do aluno, na interação entre alunos, na interação entre aluno e professor, na conveniência ou não do uso de certos recursos tecnológicos, etc.

A partir dos anais das Conferências Nacionais sobre Modelagem e Educação Matemática (CNMEM), realizadas a cada dois anos desde 1999, percebemos que o foco de muitas pesquisas feitas no Brasil tem permanecido mais na aplicação e utilização da metodologia da modelagem matemática do que no estudo do próprio processo. São várias as pesquisas de modelagem e aplicações centradas na prática, ou seja, em questões didático-pedagógicas, de caráter externo ao processo de modelagem matemática, no sentido de que não tratam de sua constituição, de sua fundamentação, mas de seu uso e suas relações com outros componentes do ambiente escolar. A ênfase na denominação 'modelagem e aplicações' remete ao estudo 14 da Comissão Internacional de Educação Matemática (ICMI), que trata de Aplicações e Modelagem na Educação Matemática e que concentra pesquisas internacionais nessa área (DISCUSSION DOCUMENT – ICMI, 2002).

Silveira (2007) fez um mapeamento e análise acerca do que foi produzido no Brasil até 2005 referente à modelagem matemática na Educação Matemática e, a partir desse mapeamento, coloca-nos que grande parte dessas pesquisas relatam atividades nas quais alunos de diversos níveis de escolaridade participaram e que foram, de certa forma, coordenadas ou acompanhadas pelos autores dessas pesquisas. Isso nos mostra que o foco das atividades de pesquisa ainda está centrado na prática. Ressaltamos que esse foco na prática é compreensível e necessário, pois o professor e seus alunos precisam de segurança, precisam reconhecer um tipo de trabalho diferenciado que rompe com uma prática usual da sala de aula, precisam vivenciá-lo.

Já estudos sobre conceitos envolvidos no processo de modelar, sobre a natureza de seus elementos e procedimentos, os quais estariam relacionados a um caráter interno do processo de modelagem, são menos comuns. Conforme o documento de discussão da ICMI sobre aplicações e modelagem já mencionado, há

uma demanda por pesquisas nessa área. São relativamente recentes as propostas de discussão em relação às concepções de ensino, de aprendizagem, de educação matemática, de matemática que estão subjacentes às várias formas de conceber a modelagem matemática e uma epistemologia que a sustente. Alguns exemplos de tais tipos de pesquisas são expostos em Bean (2001) e Anastácio (2007).

Segundo Bean (2001, p. 55)

a essência de modelagem matemática, definida como um processo de criar um modelo matemático baseado em hipóteses e aproximações simplificadoras (...) focaliza o processo matemático enquanto, as propostas para o ensino tratam questões metodológicas para conectar a Matemática aos interesses dos alunos. Embora distintos, os dois enfoques são importantes para o ensino e aprendizagem da matemática.

Logo, questões que dizem respeito à filosofia, às estruturas, começam a ser pensadas, discutidas, pesquisadas, refletidas. Segundo Anastácio (2007, p.30)

O processo de fazer modelagem se constitui a partir de uma seqüência de passos que devem ser seguidos. Durante o processo propõe-se construir modelos que representem algum problema da realidade, buscando, através de um processo de abstração, chegar a formulá-los matematicamente.

No entanto,

não é suficiente conhecer os passos na construção, análise e interpretação de um modelo matemático e suas diferentes aplicações. Faz-se necessário desenvolver nos alunos a capacidade de avaliar o processo de construção de modelo e os diferentes contextos de aplicação dos mesmos. (ANASTÁCIO, 1990, p.97).

Isso reforça a necessidade de abordagens como a que propomos. Há uma demanda sobre e necessidade de estudos teóricos, internos no sentido que colocamos, sobre os fundamentos do processo de modelagem matemática. Buscando referências a esse respeito na literatura encontramos alguns pontos de apoio. Um deles, já colocado em Blum e Niss (1989) e destacado por Bassanezi (2002), situa, dentre os argumentos para a inclusão de aspectos referentes à modelagem no ensino-aprendizagem de matemática, um argumento denominado intrínseco, segundo o qual se considera que “a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas” (BASSANEZI, 2002, p.37).

Em Blum e Niss (1991) também são apresentados argumentos favoráveis à modelagem matemática na educação matemática de modo que as experiências com modelagem possam auxiliar no desenvolvimento de uma visão multifacetada da matemática, na qual ela é vista como atividade cultural, social, como ciência, salientando, assim, o caráter interdisciplinar da modelagem matemática. Além disso, a modelagem também pode motivar o estudo da própria matemática e auxiliar a aquisição de conhecimentos acerca de seus conceitos e métodos.

Outra referência que encontramos à necessidade de pesquisas que contemplem aspectos teóricos da modelagem matemática foi o documento de discussão do grupo de estudos da Comissão Internacional de Educação Matemática (ICMI) sobre Aplicações e Modelagem na Educação Matemática (DISCUSSION DOCUMENT – ICMI 2002) que traz o levantamento de questões importantes relacionadas à teoria e à prática do ensino e aprendizagem da modelagem matemática. Esse documento afirma a existência de uma demanda por pesquisas que visem obter uma estrutura conceitual para a modelagem, na qual termos comumente utilizados como, por exemplo, ‘problema’ e ‘realidade’, tenham a devida fundamentação².

Um exemplo das referidas questões, relacionado ao nosso assunto de estudo, é o pressuposto comumente adotado de que atividades de modelagem matemática implicam em tratar de relações entre matemática e mundo real. Postula-se a existência de tais relações sem, no entanto, explicitar que relações há entre o que se denomina mundo real e matemática. Geralmente, à atividade de modelagem atribui-se um movimento que parte do mundo real, focando uma situação específica desse mundo e traduzindo-a em um modelo, que após sofrer um processo de matematização, será deslocado para um ambiente externo a esse mundo, a matemática. Podemos nos perguntar: qual a concepção de matemática implícita aqui? Nessa concepção, a matemática não faz parte da realidade? Se a matemática é concebida como externa ao mundo real, como ela pode traduzir adequadamente, ou ser fonte de conhecimento sobre, esse mundo ou parte dele?

A modelagem matemática pode ser tomada, por um lado, como um método científico de pesquisa que “alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do

² Sobre esse documento levantamos uma série de questões apresentadas e discutidas na IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, como se pode ver em (NEGRELLI, 2005).

entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (BASSANEZI, 2002, p.17). Essa é a visão proveniente da matemática aplicada.

Na educação matemática essa visão de modelagem se mantém em sua essência, passando por adaptações em função do nível de ensino em que é abordada. Para os propósitos de diversos estudos que tratam de modelagem na educação matemática, a modelagem matemática é considerada como, por exemplo, ambiente de aprendizagem, estratégia, metodologia ou processo de ensino, entre outras. Não é nosso interesse explorar particularidades dos diferentes enfoques que essas denominações trazem. Isso porque percebemos que muitas dessas caracterizações são criadas para dar condições metodológicas de trabalho para estudiosos que realizam estudos de campo à luz de alguma interpretação (opção) teórica específica. O nosso interesse e foco inicial para esta pesquisa é direcionado por um elemento característico que essas denominações, de uma maneira ou de outra, possuem: a “realidade” como ponto de partida do processo de modelagem. Na nossa visão de modelagem matemática pretendemos isolar o processo envolvido de outras práticas de caráter social, institucional, político, pedagógico. Para tanto recorreremos ao modo como esse processo é visto na matemática aplicada.

No contexto da lógica matemática, o termo ‘modelo’, importante para as duas interpretações de modelagem expostas acima, a da matemática aplicada e a da educação matemática, é tomado em outro sentido. O “modelo” usado no sentido da lógica matemática não é outra coisa senão a “realidade” ou interpretação que uma certa teoria matemática, usualmente dada em forma axiomática, pretende expressar ou descrever. Quando usada no sentido da matemática aplicada, o modelo é aquela teoria muitas vezes expressa através de equações.

Em qualquer um desses contextos, em que figura o termo ‘modelo’, há uma certa “realidade” com a qual está relacionada uma teoria matemática. Mas, em que consiste essa realidade? Qual é sua ontologia?

Bassanezi (2002), apoiado em sua experiência de cerca de duas décadas com modelagem matemática, coloca-nos esta como uma “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.” (p.16)

Essa caracterização de modelagem matemática, apesar de sintética, encerra um grande potencial de contribuição para a nossa discussão. Primeiramente por se

referir à modelagem como uma arte, o que envolve a consideração de elementos como imaginação, criatividade, intuição, sensibilidade, habilidades técnicas. De acordo com Bassanezi (2002, p.85), “a formulação de um modelo matemático é geralmente a parte mais difícil de todo processo de modelagem. Mais difícil por ser uma atividade essencialmente criativa e que depende de conhecimentos adquiridos previamente”.

Em seguida, a expressão ‘problemas da realidade’ permite-nos incitar uma reflexão e discussão acerca do que se entende por realidade e em que medida existem problemas nela. A formulação e resolução de problemas matemáticos é parte essencial do processo de modelagem e nesse processo a linguagem matemática representa um papel fundamental.

A modelagem matemática pode ser entendida como um recurso epistemológico se assumirmos a máxima de que só é possível conhecer através de uma representação. A representação pressupõe uma idéia, uma imagem do objeto que deve conter uma semelhança com o mesmo. Representar significa, do ponto de vista epistemológico, ser aquilo por meio do que se conhece alguma coisa. Mais adiante, distinguiremos, no processo de modelagem matemática, dois tipos de realidade: a realidade inicial e a realidade intermediária, e veremos que o que nos é dado a conhecer é a realidade intermediária, ou seja, uma representação da realidade inicial que se constitui no próprio objeto do conhecimento.

Para se falar de um retorno à realidade por meio da interpretação das soluções de problemas elaborados a partir de modelos, é preciso considerar que se trabalha com aproximações. De fato, “a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele”. (BASSANEZI, 2002, p. 24)

Tais aproximações estão condicionadas à linguagem, aos suportes teóricos, às concepções de matemática, de ciência e à própria intuição que se tem. Mas elas ainda estão no campo das representações. Isso nos remete a uma característica valiosa do processo de modelagem: um modelo está sempre aberto a aperfeiçoamentos que se darão tanto por uma intuição mais apurada obtida no decorrer do próprio processo, como por uma busca de ferramentas mais adequadas, que promovam uma melhor aproximação segundo os interesses que se têm. Tais elementos estão condicionados à experiência.

Anastácio e Doval (2005, p.8), em referência à mesma citação de Bassanezi (2002, p. 16) que colocamos acima, afirmam que:

A transformação de problemas do mundo real em problemas matemáticos nos desafia, pois, por mais que desenvolvamos um estudo da realidade vivenciada por nós, os modelos que a descrevem exigem um processo de abstração que implica, certamente, em uma seleção prévia de variáveis a serem consideradas. Assim, ao procurar modelos que descrevam a realidade, o que costumeiramente fazemos é limitar nosso sistema, deixando de lado alguns fatores que não são interessantes para o estudo em questão.

Posteriormente podemos fazer análise desses fatores que não foram analisados anteriormente, procurando chegar a um modelo mais completo.

Geralmente são colocadas como razões para o desenvolvimento de atividades de modelagem a função política, de alfabetização matemática do cidadão, bem como o estudo da realidade na qual esse cidadão está inserido. No entanto, perguntamo-nos se somente motivações externas ao processo de modelagem matemática justificariam sua abordagem no âmbito da Educação Matemática. Não haveria motivos ligados à natureza desse processo para que a modelagem matemática seja abordada visando o ensino e a aprendizagem de matemática? Pressupomos e mostraremos que sim. Araújo (2002, p. 20) bem nos coloca que

a Modelagem Matemática, independente do contexto em que está presente, tem como um de seus objetivos a resolução de algum problema da *realidade*, por meio do uso de teorias e conceitos *matemáticos*. As diferenças se apresentam à medida que se define qual é o objetivo de se resolver tal problema, qual é a *realidade* na qual está inserido, como a *matemática* é concebida e se relaciona com essa *realidade* etc.. Uma hipótese que pode ser levantada então é a de que é na caracterização do, ou no entendimento que se dá ao 'problema da realidade' que vão se estabelecendo as diferentes perspectivas de Modelagem Matemática. (grifos da autora).

De fato, a resolução de problemas "reais", a conscientização política, a formação do cidadão para que consiga entender e agir sobre a realidade, além da prática de um ensino mais dinâmico são razões legítimas para que se desenvolvam pesquisas visando, entre outras coisas, justificar e incentivar o emprego da modelagem matemática na educação matemática. No entanto, na busca por justificar o emprego da modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matemática também precisam ser tomados como objetos de estudo conceitos e métodos que compõem esse processo, além de possíveis filosofias para abordá-los.

O que faremos nesta tese é apresentar o processo de modelagem matemática através de diversos componentes que uma discussão sobre a realidade, que é nosso ponto de partida, vai sugerir. Esses componentes serão notoriamente três: a realidade inicial, a realidade intermediária e o modelo. Análises desses componentes nos permitirão fazer re-interpretações da própria matemática do ponto de vista da modelagem matemática, o que trará novos elementos que poderão contribuir com propostas para o ensino-aprendizagem dessa ciência, alternativas para a formação matemática do professor e do próprio matemático..

Para sintetizar, lembrando que a modelagem matemática é defendida na Educação Matemática por ser útil no estudo e compreensão da realidade, nós mostraremos como a modelagem matemática pode ser útil também no estudo e compreensão de alguns aspectos da própria matemática, que, em certo sentido, também pode ser tomada como uma realidade a ser modelada para ser compreendida.

1.3. Questões Norteadoras e Objetivos

Com o exposto anteriormente buscamos mostrar nosso assunto de investigação. A seguir enunciamos as questões centrais que nortearam este estudo:

1) De que realidade trata a modelagem matemática na educação matemática, isto é, qual é a sua ontologia?

2) Como uma caracterização dessa realidade permite uma releitura do processo de modelagem matemática de modo a considerar a própria matemática como uma realidade a ser modelada?

Essas questões incitaram a produção de textos anteriores a esta tese publicados em diferentes espaços, como se pode ver em Negrelli (2004, 2006, 2007) e Cifuentes e Negrelli (2006, 2007).

A partir das questões enunciadas visualizamos os seguintes objetivos, os quais buscamos atingir:

1 - Situar o componente 'realidade' numa descrição do processo de modelagem matemática como ele comumente é visto na educação matemática por alguns autores.

2 – Caracterizar o componente realidade no processo de modelagem matemática a partir de uma análise epistemológica do mesmo.

3 - Fazer uma releitura do processo de modelagem matemática à luz da análise epistemológica realizada.

4 - Propor uma adaptação por analogia do processo de modelagem matemática para o caso em que a realidade a ser modelada é um recorte da própria matemática.

Diante da natureza das questões norteadoras e dos objetivos traçados optamos por um estudo de caráter teórico. Essa opção deveu-se também ao fato de que, apesar de um estudo de campo poder trazer contribuições significativas para a discussão do tema, os indícios de respostas que fomos encontrando em incursões teóricas apontavam que esta, a abordagem teórica, seria a melhor opção. Inclusive para o nosso intuito de reunir mais elementos para uma formulação teórica que permita outros estudos de campo.

1.4. Uma Justificativa Pessoal

Nosso interesse por questões relacionadas a aspectos filosóficos e matemáticos de propostas pedagógicas para o ensino-aprendizagem de matemática já foi foco de nossa pesquisa de mestrado, (NEGRELLI, 2000), na qual abordamos questões relativas aos fundamentos da matemática, ao desenvolvimento histórico de seus conceitos e à legitimação de seus métodos, focando no papel de procedimentos indutivos e dedutivos na aprendizagem de matemática, destacando a necessidade da sua consideração na formação de professores.

Nosso interesse por questões relacionadas à modelagem matemática para produzir esta tese provém de nossa experiência como professora de matemática no ensino médio e no ensino superior. No Ensino Médio atuamos em uma instituição cuja proposta de desenvolvimento curricular baseava-se na resolução de problemas por meio de projetos. O termo projeto é empregado aqui como uma atividade na qual a resolução de problemas ocorre em três etapas, com características e

especificidades próprias, mas que constituem uma unidade. Na primeira etapa, denominada *diagnóstico*, é delineado um problema a ser investigado e solucionado. A etapa seguinte é o *equacionamento*, no qual estão incluídos o planejamento e a escolha dos procedimentos e recursos a serem utilizados no tratamento que será dado ao problema delineado. A terceira etapa, a *ação*, constitui-se na resolução propriamente dita do problema, na avaliação do processo, na validação dos resultados e no uso destes em alguma ação transformadora perante a sociedade. Essa proposta previa o desenvolvimento gradual de projetos envolvendo uma, duas e várias disciplinas, o que de certa forma ocorreu (BREUCKMAN; NEGRELLI, 2000).

Na disciplina de matemática, o desenvolvimento desses projetos envolvia, na maioria das vezes, coletas de dados, construção de tabelas, gráficos que auxiliavam na busca de relações entre variáveis observadas em situações-problema (preferencialmente propostas pelos alunos) e que eram apresentadas por equações, dentre outras possíveis formas de representação, que permitissem estudá-las do ponto de vista matemático. Ou seja, o desenvolvimento de um projeto, demandava uma atividade muito próxima ou mesmo equivalente à modelagem matemática, considerando o modo como é caracterizada por vários autores, como Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2003), entre outros.

Tanto naquela época como em nossa atividade docente atual, no Ensino Superior, como professora das disciplinas de matemática e estatística em cursos de graduação na área de Ciências Sociais Aplicadas, tornaram-se evidentes alguns obstáculos que surgem da necessidade do que podemos chamar de ‘transição’ da linguagem natural para a linguagem matemática, quando se visa a representação matemática de relações que serão empregadas para a construção de modelos. Tais obstáculos acabavam dificultando o avanço do estudo dos conceitos e técnicas matemáticos previstos no currículo dos cursos, bem como dos próprios fenômenos a serem estudados (modelados). A percepção da existência desses obstáculos motivou-nos a buscar diferentes formas de propor as atividades que demandassem esse tipo de transição, tais como a resolução de problemas e propostas de modelagem matemática. Para a proposição dessas atividades necessitamos mobilizar conhecimentos sobre a natureza da matemática, de seus conceitos e métodos e sobre a limitação dos mesmos. Ou seja, tivemos reafirmada a pertinência daqueles conhecimentos sobre fundamentos da matemática adquiridos em etapas anteriores de estudo, de modo especial no Curso de Mestrado, e também a

necessidade de empregá-los em busca de justificativas para um trabalho com modelagem matemática que objetivasse, além da resolução de problemas motivados pelos ambientes nos quais convivem alunos e professores, propiciasse uma compreensão da matemática que pode estar envolvida nesse processo. Não a matemática dos conteúdos nos programas das disciplinas dos currículos, mas aquela matemática que caracteriza uma forma diferenciada de pensar, conforme colocamos inicialmente, referindo-nos à interdisciplinaridade.

De posse dessas inquietações candidatamo-nos ao curso de Doutorado em Educação da UFPR, com um anteprojeto que previa a investigação de questões relacionadas à elaboração e uso de modelos matemáticos para a educação matemática.

Após termos ingressado no referido Curso de Doutorado e cursado algumas disciplinas ofertadas pelo Programa de Pós Graduação em Educação da UFPR, percebemos que antes da transição de linguagens que nos chamava a atenção há uma etapa anterior. A transição de um local a outro pressupõe saber de onde se parte e aonde se quer chegar. Assim, vendo que grande parte das pesquisas sobre modelagem matemática que consultamos colocam a realidade como ponto de partida, naturalmente nossas atenções se voltaram para esse componente. Afinal, o que é a realidade em modelagem matemática? A partir de várias leituras e discussões que ocorriam nas sessões de estudo e orientação, fomos nos aproximando daquilo que se tornou nossas questões norteadoras. Mas essa aproximação não se deu de forma linear. Sobre esse ponto falaremos nas considerações finais.

A partir de respostas parciais às questões colocadas optamos por apresentar uma caracterização do componente realidade no processo de modelagem matemática, o que nos levou a uma releitura desse processo que, por sua vez resultou em uma proposta de fundamentação filosófico-epistemológica e matemática dessa releitura. Como consequência disso apresentamos uma nova forma de ver a matemática do ponto de vista da modelagem matemática, o que nos remete aos nossos interesses iniciais referentes a aspectos filosóficos e matemáticos de propostas pedagógicas para o ensino-aprendizagem de matemática.

Capítulo 2

A REALIDADE NO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

O verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em um outro contexto, novo. (D'AMBROSIO, 1986, p. 44)

Neste capítulo situamos o componente 'realidade' em descrições do processo de modelagem matemática como ele comumente é empregado na educação matemática. Fazemos uma análise desse mesmo a fim de esclarecer em quais etapas do referido processo ele intervém e qual o seu papel epistemológico.

Para tanto, começamos apresentando etapas do processo de modelagem matemática encontradas em alguns autores que tratam desse assunto. Ressaltamos que não enfatizaremos concepções de modelagem matemática, mas descrições desse processo, embora a partir dessas descrições se possa inferir possíveis concepções que as sustentam. Nosso interesse nessas descrições, ainda que incompletas, é visualizar o componente realidade em algum momento.

Em seguida apresentamos alguns estudos sobre modelagem na educação matemática que contemplaram a questão da realidade de alguma forma, terminando com uma releitura do processo de modelagem matemática motivada pela referida análise epistemológica.

2.1. Algumas Etapas do Processo de Modelagem Matemática

Desde o início deste nosso estudo, e mesmo antes disso, temos atentado para caracterizações do processo de modelagem matemática presentes em publicações no âmbito da Educação Matemática. Os autores dessas publicações, principalmente aqueles que desenvolveram algum tipo de pesquisa de campo, apoiaram-se em uma dessas caracterizações, algumas vezes tomando-a de autores

e textos já conhecidos, outras vezes criando adaptações de alguma delas, conforme seus interesses de pesquisa.

Silva (2007), por exemplo, apresenta cerca de uma dezena dessas caracterizações, as quais foram denominadas definições, com o intuito de propor em seguida uma discussão sobre ações de modelagem para a formação de professores. Já Araújo (2002) decidiu não utilizar o termo 'definição' mas sim 'perspectiva', por julgar que o primeiro possui um caráter de universalidade, incompatível com o fato de existirem várias definições para modelagem matemática. Essa autora apresenta algumas perspectivas de modelagem matemática lembrando-nos que nelas "a ênfase está na utilização da matemática para o tratamento de situações reais não-matemáticas" (ARAÚJO, 2002, p.16).

A um estudo de campo, por questões práticas, metodológicas e até de referencial teórico pode ser conveniente adotar uma dessas caracterizações, definições ou perspectivas. Como bem colocou Araújo (2002), há uma multiplicidade de perspectivas de modelagem matemática e estas sofrem transformações quando utilizadas como um enfoque pedagógico. Para os nossos propósitos não se revelou essencial a adoção de nenhuma delas, embora isso não nos isente de colocar nossa visão acerca da modelagem matemática, o que fizemos no capítulo 1, uma vez que nosso interesse reside em um elemento característico presente em qualquer perspectiva de modelagem: a referência a uma realidade a ser modelada.

Optamos por olhar descrições do processo de modelagem matemática, em sua maioria inspiradas na visão tradicional sugerida pela Matemática Aplicada, o que serviu de base para nosso interesse em situar o componente realidade no referido processo. Essa escolha, como já vimos, permite-nos isolar o processo de modelagem matemática de outras práticas, como as sociais e políticas, pondo em relevo suas potencialidades epistemológicas.

Chamamos de 'tradicional' aquele processo advindo da Matemática Aplicada na qual a modelagem é tida como a metodologia típica de trabalho. Segundo Bassanezi (2002, p.32), "a Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática." Esta última é caracterizada, pelo mesmo autor, na referida obra, como "um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos." (p. 24). Por modelo matemático

entende o autor “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” (p. 20).

É comum encontrarmos na literatura acerca da modelagem na Educação Matemática uma descrição desse processo em etapas sendo estas caracterizadas por elementos que incluem técnicas e procedimentos que encerram em si conceitos, a nosso ver, fundamentais para o aprendizado de matemática e, mais especificamente, para o pensar matematicamente. Alguns desses conceitos são o de realidade, representação, linguagem, problema, modelo, formalização, validação.

Uma seqüência de etapas a serem seguidas no processo de modelar uma situação ou problema real exposta em (BASSANEZI, 2002) é a seguinte.

A primeira etapa é a *experimentação* na qual dados referentes a uma situação de interesse são coletados para posteriormente receberem um tratamento matemático. Notemos que, nesse primeiro momento, a observação e a experiência, desempenham um papel fundamental e vão direcionar as etapas posteriores. Aqui já se manifesta o caráter empirista da modelagem matemática.

A segunda etapa é a *abstração* e seu objetivo é obter modelos matemáticos para a situação ou problema explorados na etapa anterior. Para isso o reconhecimento de variáveis e possíveis relações entre elas, o levantamento de hipóteses e o emprego adequado de algum tipo de linguagem é que permitirão a elaboração, primeiro de um recorte daquela situação focada inicialmente e depois a elaboração sobre esse recorte de modelos matemáticos propriamente ditos. Notemos que nesta etapa há construção de um recorte, promovido por meio da elaboração de hipóteses que realizam simplificação na situação inicial. Sobre esse recorte é que será elaborado o modelo matemático, o que sugere que ele, esse recorte, também possui um *status* de realidade, o que veremos em nossa discussão posterior.

A terceira etapa da descrição do processo de modelar exposta em Bassanezi, (2002) é a *resolução*, que envolve a manipulação do modelo matemático, uma vez que representa um problema levantado, demanda a busca por alguma solução. Podemos dizer que esta etapa solicita conhecimentos acerca de conceitos e métodos matemáticos bem como uma habilidade relativa ao pensar matematicamente.

Na quarta etapa, denominada *validação* os modelos são testados de modo a verificar se os mesmos dão conta dos fenômenos observados na primeira etapa, se

as hipóteses empregadas para a produção de um recorte da situação focada inicialmente se revelaram adequadas, não produzindo simplificações excessivas, por exemplo.

A quinta e última etapa é a *modificação* na qual é feito um retorno à situação inicial de modo a confrontá-la com os resultados obtidos por meio da exploração do modelo matemático. Aqui poderão ser avaliadas e modificadas, se necessário, as hipóteses que geraram a representação sobre a qual o modelo foi construído. Vemos que só nesta etapa se consolida a elaboração do modelo procurado.

Relacionamos com essa descrição do processo de modelar proposta por Bassanezi a colocação de Bean que aponta para a idéia de produção de um recorte, elaborado a partir de hipóteses e aproximações simplificadoras. A produção desse recorte é atividade essencial no processo de modelagem, servindo inclusive para diferenciá-lo de outros processos como a resolução de problemas. Segundo Bean (2001, p.53),

os aspectos que distinguem a modelagem matemática de outras aplicações de matemática são as exigências das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação de modelos. As demais etapas - o problema, a resolução e a verificação da matemática, a validação da solução e a decisão - valem para qualquer tipo de solução de problema envolvendo matemática.

Concordamos com Bean no que diz respeito às exigências postas por ele. Mais ainda, vemos na percepção e na exploração dessa etapa no processo de modelagem uma importante oportunidade para explorar a natureza interdisciplinar desse processo.

Bean (2003) apresenta uma caracterização da modelagem matemática e de cinco seus componentes, apontando alguns dos tipos de pensamento que cada um exige. Para esse autor, “as descrições de modelagem enfatizam aspectos como a motivação e a utilidade da matemática para analisar e descrever situações e problemas da vida sócio-cultural do aluno.” (p.1).

O primeiro componente da caracterização da modelagem matemática apresentada por Bean (2003) é a *problematização*, por meio da qual o modelador reconhece um problema, apropria-se dele formulando uma questão diretriz e objetivos para investigá-lo. A *investigação* será, então, o segundo componente. Ao realizá-la o modelador seleciona características do fenômeno que lhe interessam e

se mostram pertinentes na construção do modelo matemático. O que o modelador faz de fato é formular hipóteses e aproximações simplificadoras que delimitam e operacionalizam a investigação. Feito isso se procede com a *formulação do modelo*, no que consiste o terceiro componente dessa descrição do processo de modelagem. Estabelecidos os parâmetros, as características e as relações entre as características do fenômeno, esses são relacionados aos conceitos, propriedades e técnicas matemáticas, o que resultará na elaboração de um modelo. O quarto componente é a *verificação* que envolve critérios objetivos, relativos à validação dos procedimentos matemáticos empregados, e critérios subjetivos, que atuam na decisão sobre a adequação ou não do modelo ao problema considerado. O quinto e último componente dessa descrição é o *fechamento* que ocorre por meio de uma ação, em resposta ao problema investigado.

Bean salienta que esses componentes são “interdependentes e interpenetram-se. No pensamento do modelador, um componente sempre pede um outro, de acordo com a dinâmica da construção do modelo”. (BEAN, 2003, p. 10) Notemos que Bean apresenta a modelagem matemática como uma atividade, reforçando essa visão dinâmica e interdisciplinar que apontamos no capítulo 1.

Anastácio (1990) também chegou a uma configuração de modelagem após um estudo por meio do qual buscou saber o que é modelagem matemática. Segundo essa autora, a modelagem se configura como

um processo através do qual, a partir de problemas e de aspectos da realidade vivida pelos participantes do processo de ensino e aprendizagem da matemática, chega-se à construção de um modelo matemático. A aplicação de técnicas e teorias matemáticas leva a soluções que podem, ou não, ter correlatos na realidade vivida.

A questão de se trabalhar a realidade vivida parece, então como um aspecto fundamental que é necessário focar. [...]

A realidade é o mundo, entendido como horizonte de relações no qual o ser humano vive e se situa. (ANASTÁCIO, 1990, p.94)

Notemos que tanto para Anastácio como para Bassanezi, e também para outros autores que citaremos em seguida, o componente realidade no processo de modelagem aparece como decisivo. Para Bassanezi (2002, p. 19)

quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo.

Já Anastácio (1990, p.96) coloca-nos que

ao considerar a compreensão da realidade desde sua percepção mais particular e individual até aquela mais geral e abstrata, o trabalho de modelagem nessa realidade assim percebida será concebido num esquema em espiral. Na medida em que se avança, seguindo a trajetória desta curva, ao mesmo tempo se avança em extensão e em profundidade no trabalho que se faz.

Para Biembengut e Hein (2003) a modelagem é um meio de interação entre matemática e realidade que permite “representar uma situação ‘real’ com ‘ferramental’ matemático (modelo matemático) [e] envolve uma série de procedimentos”. (p. 13). Entre as etapas que permitem descrever esses procedimentos estão a *interação*, na qual é feito o delineamento de uma situação que se pretende estudar, e a *matematização*, onde a partir da classificação de informações, da seleção de variáveis e símbolos apropriados para descreverem relações entre elas em termos matemáticos, é formulado um problema referente àquela situação focada inicialmente. A etapa seguinte é a *elaboração de um modelo matemático* para a situação-problema representada.

Ubiratan D’Ambrosio, um dos precursores no debate acerca da modelagem na educação matemática brasileira, coloca-nos, em D’Ambrosio (1986), que o processo de modelagem serve de base para estratégias que visem à capacitação do indivíduo para analisar globalmente a realidade na qual ele ocupa uma posição e age. Por meio da modelagem definem-se estratégias de ação sobre essa realidade.

Numa esquematização da estratégia que é considerada a base para o processo de modelagem, apresentada por esse autor, a matemática é inserida como linguagem. Essa estratégia “dá ao homem a condição de exercer seu poder de análise da realidade, como primeiro passo para influir nessa realidade”. (D’AMBROSIO, 1986, p. 64). Nessa esquematização parte-se da realidade que, tomada como objeto de estudo pelo sujeito, apresenta situações que permitem a formulação de um problema real em linguagem natural. Esse problema é então reformulado em linguagem matemática para depois ser submetido a uma análise que viabilize sua solução. Uma vez encontrada a solução, esta, e a própria análise efetuada são formuladas na linguagem natural para que, num retorno à realidade da

qual se partiu, possa-se optar pela adoção da solução encontrada, pelo seu aprimoramento ou descarte, refazendo todo o processo se necessário.

Vemos também nessa descrição do processo de modelagem a realidade como elemento fundamental. Quando D'Ambrosio (1986, p. 65) afirma que “o início do processo [de modelagem] é traduzir a situação real num problema formulado em linguagem convencional – no caso, linguagem matemática”, ele ainda não está considerando que o próprio estabelecimento da realidade, o que fornece situações que servirão de impulso para a necessidade de modelar, ainda não ocorreu; isso ele faz em seguida. Ou seja, o início do processo de modelagem ocorre antes do que D'Ambrosio sugeriu acima.

Antes da tradução da situação real para um problema formulado em linguagem matemática devemos “eliminar algumas dificuldades oferecidas pela situação real, deixando bem claro para o aluno o caráter ‘aproximativo’ que a formulação em linguagem convencional apresenta com relação à situação real.” (D'AMBROSIO, 1986, p. 65). O que se obterá então será uma espécie de simulação que contém uma simplificação da realidade considerada que “permite formular detalhes que seriam difíceis, quase impossíveis de serem destacados numa linguagem natural” (D'AMBROSIO, 1986, p. 65). Em função dessa simplificação, revela-se também a presença de elementos matemáticos no processo de modelagem, anteriores à tradução da situação ou problema em linguagem matemática, como relações, estruturas, regularidades.

Assim como ocorre na segunda etapa da descrição proposta por Bassanezi (2002) temos aqui que a simplificação da situação da realidade tomada inicialmente como foco de estudo resulta numa espécie de recorte, traduzido em termos de uma estrutura que contém relações consideradas relevantes.

O que D'Ambrosio sugere então como início do processo de modelagem é a elaboração de uma representação (em termos de linguagem matemática), de um recorte da realidade considerada inicialmente. Para a produção desse recorte utilizamos hipóteses e aproximações simplificadoras, adotamos fundamentos teóricos, agimos segundo nossas concepções, segundo as teorias que sustentam nossa visão de mundo, ou seja, construímos um “exemplo que representa o papel de realidade” (BACHELARD, 2000, p. 12). Isso nos sugere, seguindo Bachelard, que é possível visualizar no componente realidade no processo de modelagem algo

construído e sobre o que se formulará um problema que será abordado e resolvido matematicamente.

As descrições apresentadas trazem componentes básicos que podemos encontrar em várias outras descrições elaboradas e adaptadas. Podemos dizer que essas descrições também trazem momentos que podemos citar como característicos do processo de modelagem e, como já mencionamos, a construção(!) de uma realidade a ser modelada é um desses momentos.

Em geral, do ponto de vista metodológico, descrições do processo de modelagem matemática empregadas em estudos no âmbito da Educação Matemática trazem a realidade como ponto de partida e motivação, a matemática como ferramenta para o seu estudo e a obtenção de modelos como um dos objetivos a serem atingidos, visando o conhecimento dessa realidade.

O processo de modelagem é muito rico de modo que, quando tomado na educação matemática, etapas anteriores à elaboração do modelo têm muito a contribuir para a formação matemática. Quando abordamos a questão da realidade, por exemplo, ressaltando aspectos matemáticos e epistemológicos, a discussão sobre essa questão pode receber outros contornos e interpretações. Esse modo de cercá-la contribui para uma vivência da interdisciplinaridade, revelando outros potenciais além daquele que permite explorar e compreender o ambiente em que se vive. A compreensão da matemática envolvida no processo de modelagem é um outro potencial que precisa ser explorado.

Situada a questão da realidade, tendo como base os autores citados, no processo de modelagem matemática apresentado por meio de etapas que o compõem, passemos à discussão de alguns trabalhos que contemplaram essa questão de alguma forma.

2.2. A Realidade em Estudos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática

Como já indicamos, algumas das pesquisas desenvolvidas sobre modelagem na Educação Matemática sugerem a necessidade de uma discussão mais aprofundada e fundamentada sobre a questão da realidade. Na maioria dessas

pesquisas é mencionada essa questão, sua concepção e relação com a matemática. A seguir trazemos aspectos dessa questão abordando alguns trabalhos que consideramos relevantes ao nosso propósito.

Um desses trabalhos é o de Anastácio (1990) que procurou revelar como a matemática é concebida e como ela se desenvolve em situações de ensino e de aprendizagem quando se trabalha com modelagem matemática, focando na busca de respostas para as seguintes questões: O que é a modelagem matemática? Em que medida ela desenvolve o conhecimento da matemática enraizado no mundo-vida do aluno?

Para tanto, Anastácio apoiou-se, em um primeiro momento, em autores estrangeiros que escreviam sobre modelagem matemática e em autores brasileiros, embora a produção destes últimos ainda fosse pequena. Em um segundo momento, examinou o que dela falavam os que a praticavam e que naquela época não escreviam tanto sobre modelagem, embora debatessem acerca do tema, uma vez que a modelagem matemática fazia parte de suas práticas e interesses. Em um terceiro momento observou a prática de professores que utilizaram modelagem matemática durante e após participarem de um curso de treinamento, oferecido por ela, para professores, sobre meios de se trabalhar com modelagem matemática.

Devemos alertar que o pano de fundo filosófico de Anastácio (1990) é a fenomenologia, no qual termos como “mundo-vida” e “realidade vivida” tem um significado específico e remetem a uma realidade consciente.

Desses três momentos, denominados momentos de aproximação à modelagem, a autora, revelando sua perspectiva fenomenológica, obteve elementos para elaborar suas considerações referentes às questões postas. Essas elaborações foram apresentadas por meio de mais de uma dezena de unidades significativas, dentre as quais destacamos: modelagem matemática, concepção de matemática, modelos, concepção de realidade, concepção de ação e realidade, concepção de educação e concepção de educação matemática.

As concepções de modelagem matemática identificadas nos três momentos convergiram para a seguinte, segundo a autora,

a MM é um processo que se produz através de vários passos. Ao abstrair os traços percebidos na realidade vivida, esse processo leva à construção de um modelo matemático. Em cada um dos passos da Modelagem é necessário ficar atento para o fato de que os resultados obtidos têm correlatos na realidade vivida. (ANASTÁCIO, 1990, p.88, grifos da autora).

Notemos que essa concepção já aponta a modelagem matemática como um processo no qual se parte da “percepção” de uma realidade (vivida), abstraíndo-a visando a construção de um modelo.

Também convergiram nos três momentos as concepções de matemática que a colocam como

estratégia de ação e instrumento que o homem possui para lidar com o mundo. A matemática é apresentada como modelo de situações vividas [...], vista como corpo de conhecimentos que se caracteriza por sua formalização, [...] concebida como algo presente na realidade. (ANASTÁCIO, 1990, p.88, grifos da autora)

Aqui, sem a devida distinção a matemática é colocada como instrumento e como corpo de conhecimentos. Ou seja, como método e como objeto.

Já as concepções de modelo nem sempre convergem, mas nelas prevalece a “idéia de modelo entendido como transcrição em entidades matemáticas de um determinado fenômeno ou situação real vivida.” (ANASTÁCIO, 1990, p.88-9).

Quanto às concepções de realidade e de ação e realidade, capturadas, estas não apresentaram convergência. Um não tomam a matemática como parte da realidade, apenas vêem-na como instrumento para agir sobre ela. Outras concepções têm a matemática inserida na realidade, considerando matemática e realidade inseparáveis. Assim, sobre a concepção de matemática em relação com a de realidade, que permeiam atividades de modelagem matemática no ensino, Anastácio (1990, p.99), coloca-nos que

há os que vêem a matemática presente na realidade, servindo de instrumento de análise dessa realidade, ainda que não neguem os aspectos de sua formalização. Nesse caso, a modelagem serve para a construção do conhecimento matemático ao mesmo tempo que possibilita o desenvolvimento da compreensão da realidade vivida e de sua interpretação. [...] A matemática aparece como uma ciência que se constitui como corpo axiomático e está no mundo-vida, explicando aspectos desse mundo que podem ser vistos sob uma ótica matemática e possibilitando deslindar a relação desses aspectos com outros de outras naturezas aos quais vêem emaranhados.

E quanto às concepções de educação e de educação matemática, embora também não convirjam, segundo a autora, nelas prevalece a idéia de que a modelagem matemática valoriza o saber fazer do aluno e propicia um movimento

dialético ao supor uma “constante análise das questões que o fazer pedagógico propõe.” (ANASTÁCIO, 1990, p.91).

O estudo de Anastácio (1990) nos mostra que quando a realidade é tomada no processo de modelagem matemática ela aparece associada a uma concepção de matemática em relação a essa realidade, ou seja, matemática e realidade não são pensadas separadamente. De fato, para conceber a realidade fazemos uso de elementos como indivíduos, variáveis, relações, estruturas, regularidades, enfim, mobilizamos nosso pensamento matemático sem que isso nos tenha sido imposto. Talvez, por essa razão, as concepções de realidade e de matemática não tenham se revelado independentes uma da outra. Notemos que “conceber a realidade” implica numa teorização dela, o que pode ser identificado com a construção do que, mais adiante, denominaremos realidade intermediária.

Em outro momento Anastácio retoma a questão da realidade e sua problematização no âmbito da modelagem matemática, considerando-a um tema bastante denso, podendo instigar a produção de muitas pesquisas. Anastácio e Doval (2005) colocam não só a concepção de realidade, mas também a de tempo e a de matemática como pano de fundo da modelagem matemática, vista por esses autores como uma possibilidade para trabalhar problemas que estejam vinculados à realidade.

Numa discussão acerca de “problemas da vida real” no ensino fundamental esses autores chamam a atenção para um conflito entre as concepções de matemática que podem nortear os encaminhamentos desse tipo de problemas: a concepção tradicional de matemática, cujo foco está nos cálculos e análise de resultados, e as concepções atuais de matemática, influenciadas pela etnomatemática e pela modelagem matemática, que contemplam fatores como os culturais, sociais e econômicos que fazem parte da vida das pessoas.

Anastácio e Doval (2005) buscam no campo da sociologia e da antropologia elementos para conceber a realidade no processo de modelagem, apoiados em Berger (1985), que apresenta a realidade como o entorno social-antropológico e que considera a concepção de múltiplas realidades, impregnadas de símbolos e signos que o sujeito compreende na medida em que vai sendo inserido nelas. As disciplinas escolares, por exemplo, podem ser vistas como configurações de realidades diferentes, pelas quais o aluno transita utilizando para isso linguagens adequadas.

Relacionando concepções de realidade e conhecimento, esses autores, apoiados em outros, apresentam-nos quatro formas de se conceber a realidade. São elas: a realidade *objetiva*, que existe independente do conhecimento que dela se tem, podendo apenas ser conhecida parcialmente, nunca na sua totalidade; a realidade *percebida*, restrita àquilo que cada observador capta de uma realidade também tida como existente, sendo portanto, limitadora; a realidade *construída*, resultante da elaboração mental de cada pessoa, não admitindo portanto a existência de uma realidade única; e a realidade *criada*, que se apóia numa realidade provável, que não tem sua existência garantida, de modo que sua negação leva à criação de uma nova realidade possível.

Os direcionamentos que são dados para as situações que são estudadas por meio da modelagem matemática indicarão a consideração de uma ou mais dessas concepções de realidade. Por exemplo, segundo Anastácio e Doval, em um estudo acerca de fatores genéticos associados à presença do vírus HIV, causador da Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS), que causam mais mortes, poderíamos desprezar a associação desse vírus com outras doenças de natureza não genética, adotando assim as concepções de realidade diferentes da objetiva, afastando-nos da idéia de que os modelos descrevem uma realidade determinada.

Novamente Anastácio, agora com o objetivo de discutir aspectos epistemológicos da modelagem matemática, (ANASTÁCIO, 2007), retoma questões acerca de concepções de realidade e de matemática, apontadas em Anastácio (1990) e a partir das unidades significativas resultantes da análise realizada há quase duas décadas e do objetivo posto identifica duas categorias que auxiliam no estudo da modelagem matemática quando tomada no âmbito da educação matemática, a saber: modelagem matemática e seus procedimentos e concepções de realidade e de matemática. Essas questões, segundo a autora, contribuem para o esclarecimento do que vem a ser a própria modelagem matemática, com o que concordamos, uma vez que recaímos na questão da realidade em virtude de um interesse de investigar o próprio processo de modelagem.

Focando suas reflexões na categoria referente às concepções de realidade e de matemática, Anastácio (2007, p.26-7) coloca-nos que

ainda que se fale em etnomatemática e modelagem ou em modelagem e matemática acadêmica, não são muitos os autores que se dedicam a refletir de modo sistemático sobre estas questões, buscando seus aspectos

mais constituintes. Utiliza-se a Modelagem Matemática tanto com o propósito de pesquisar uma determinada etnomatemática, como com a intenção de aplicar conhecimentos de Matemática instituída, sem que seja muito comum que se perguntem, entretanto, pelas concepções que estão presentes nestes processos.

Se considerarmos a origem da modelagem nos procedimentos e métodos associados a Galileu e Descartes, cuja concepção de realidade como algo em si, que apesar de sua complexidade, pode ser traduzida na linguagem matemática, então uma abordagem da modelagem da educação matemática pode

implicar na constituição de uma idéia de matemática como algo presente na realidade. Quando se pergunta pela matemática que se pode ter ao observar um determinado fato, ressalta-se esse caráter de imanência da matemática na realidade. Reforça-se a concepção pitagórica [que atribui aos números o fundamento do qual todo o universo é composto] e pode-se chegar a defender que a matemática está em tudo e sem ela vive-se o caos e o vazio. (ANASTÁCIO, 2007, p.31).

Anastácio complementa sua afirmação exemplificando um caso de manifestação dessa concepção de matemática referindo-se à prática de justificar a escolha de um tema para o trabalho com modelagem pelo fato dele possibilitar o desenvolvimento de conteúdos matemáticos ou ainda possibilitar uma aproximação entre realidade e matemática. Isso reflete uma visão da matemática diluída na realidade. Mas essa é uma visão. Uma outra seria aquela em que “matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem matemática é um meio de fazê-los interagir” (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 13.). Assim,

compreender que a realidade não é matemática significa também compreender que descrevê-la matematicamente constitui uma das inúmeras possibilidades de conhecê-la e, assim sendo, partir de um problema real para construir modelos que representem aquela situação constitui uma atividade importante e rica. Entretanto, nos abre a vislumbrar outros modos de expressar e descrever a realidade que vivemos. (ANASTÁCIO, 2007, p.33).

Questões como essas desembocam numa discussão acerca da concepção de realidade no âmbito da modelagem. No nosso caso, nas várias definições de modelagem levantadas por Anastácio (1990) os temas realidade e problema do mundo real estão presentes, todas elas se referindo à possibilidade de tratamento dessa realidade ou de resolução desse problema por meio de modelos matemáticos.

Notemos que nessa discussão acerca de concepções não se faz necessário, nem conveniente, adotarmos um único posicionamento, mas promovermos o diálogo entre diferentes filosofias que sustentam as diversas concepções. Não é produtivo adotar a posição de que a matemática é construída, ou ao contrário, descoberta; que a realidade é dada, ou ao contrário, elaborada. Na abordagem do processo de modelagem que faremos esses posicionamentos convivem e não se excluem se adotamos uma atitude crítica e reflexiva em busca de fundamentos para nossas atitudes. Nessa abordagem não é nosso intuito discutir a relação realidade e matemática no sentido de a matemática ser parte ou não da realidade, senão considerar a matemática como ela própria sendo uma realidade a ser modelada.

2.3. Uma Caracterização do Componente Realidade no Processo de Modelagem Matemática

Vimos que uma atitude característica de abordagens do processo de modelagem matemática na educação matemática é tomar a realidade como ponto de partida. Mas em que consiste essa realidade? Ou ainda, de que realidade trata a modelagem matemática?

Em um primeiro momento, podemos entender que ela trata da realidade composta por elementos de natureza econômica, física, social, política, psicológica, etc., cuja existência podemos supor, de um ponto de vista realista³. À modelagem matemática interessa transpor um problema dessa realidade para a matemática com a finalidade de compreendê-la através da resolução desse problema, como já colocou Bassanezi (2002).

Porém, onde reside o 'problema' que será transposto para a matemática: na realidade? Acreditamos que não. Há um momento intermediário entre a realidade e o modelo, no processo de modelagem matemática, que consiste numa problematização que implica em uma outra realidade que denominaremos *realidade intermediária*, que ainda não é o modelo. É um recorte de uma situação daquela

³ Realismo, para nós, é o que, na sua versão mais simples, Kant chama de realismo empírico: o reconhecimento da existência das coisas independentemente do conhecimento que temos delas.

realidade inicial, propiciado pela elaboração de hipóteses e aproximações simplificadoras, a partir do qual se formulará o problema.

Para que a problematização ocorra são necessárias abstrações, situando o problema em um outro plano que já não é o da realidade da qual se tratou inicialmente. A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, composta por elementos existentes fora da mente do indivíduo, numa visão platonista, e que são passíveis de serem captados por ele de alguma forma, com o auxílio dos sentidos.

Essa percepção da realidade, seguindo Poincaré (1946), vem acompanhada de certos parâmetros de seleção como homogeneidade, simplicidade, regularidade, dentre outros, que, no fundo, têm um caráter de estrutura matemática, que será parte da ontologia dessa realidade intermediária.

Essa seleção também pode ser guiada por uma preferência aos elementos mais rapidamente percebidos, que se revelam mais freqüentes e, devido a isso, pareceriam mais simples pelo fato de estarmos acostumados a eles. Esses elementos destacar-se-iam a um primeiro olhar sugerindo homogeneidade em um ambiente naturalmente complexo e poderiam então revelar regularidades que permitirão fazer previsões. A intuição matemática terá um papel fundamental nesse momento de seleção, o que revela o papel decisivo do 'sujeito epistêmico' no processo de modelagem.

Essa escolha de elementos seria o passo inicial na elaboração da realidade intermediária, o que implica numa simplificação da realidade enfocada inicialmente, destacando elementos essenciais e descartando os periféricos, para que se possa, posteriormente, compor uma representação da mesma utilizando diversas linguagens, desde a natural, a natural enriquecida com elementos gráficos, a matemática. Há aqui um caráter aproximativo devido a limitações impostas pela linguagem.

A linguagem, dependendo de sua complexidade, é a que vai nos dar as limitações das possibilidades de conhecimento dessa realidade intermediária, uma vez que a inicial não nos é possível conhecer, se admitirmos que não podemos conhecer nada além do que podemos expressar por meio de uma linguagem, parafraseando Wittgenstein.

Por exemplo, a linguagem natural, a linguagem natural enriquecida com figuras e esquemas, a linguagem algébrica, trazem diferentes níveis de

complexidade que permitirão aproximações em maior ou menor grau com a realidade inicial. Em sistemas axiomáticos formais podemos falar em linguagens de primeira ordem, ou de ordem superior que revelam níveis de complexidade ainda mais altos.

Na verdade, a linguagem convencionada permite uma simulação da realidade, contendo implicitamente uma simplificação da realidade. [...] Por outro lado, a formulação simplificada do contexto real global permite formular detalhes que seriam difíceis, quase impossíveis de serem destacados numa linguagem natural. O jogo de dois aspectos aparentemente contraditórios na reformulação do problema [...] está na essência do método científico e [...] deve ser um dos principais componentes do processo educacional. (D'AMBROSIO, 1986, p.65).

Dale Bean em um artigo no qual busca esclarecer quais são as características que distinguem modelagem matemática de outras aplicações no ambiente de ensino de matemática coloca-nos que

a essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento. (BEAN, 2001, p.53).

Pela citação anterior vemos que Bean (2001) pode ter a idéia de uma realidade intermediária, no sentido que a colocamos, embora não a explicita. No entanto, para ele essa realidade é o modelo. Para nós ainda não. No processo de modelagem matemática temos uma realidade inicial (dada), uma realidade intermediária (construída, e que será modelada) e o modelo. A realidade intermediária tem mais *status* de realidade do que de modelo.

As aproximações simplificadoras podem ser entendidas como situações limites, que consideramos parte da realidade intermediária, mas que não acontecem necessariamente na realidade inicial. A simplificação não significa fazer um recorte elementar da realidade, mas trazê-lo devidamente modificado da realidade, obtendo situações limites. Por exemplo, ao utilizarmos uma representação para a órbita dos planetas do sistema solar podemos adotar uma órbita circular, o que nos permite estudar o movimento desses astros em um determinado contorno. No entanto, a

simplificação da órbita de modo a considerá-la circular é algo externo ao que de fato ocorre, mas nos permite estudar os fenômenos com certa aproximação.

O processo de simplificação tanto pode então, desse ponto de vista realista, significar uma eliminação de alguns elementos, como uma permanência de outros que vão permitir, de um ponto de vista realista, o trabalho com a essência. De outro ponto de vista, o positivista, por exemplo, no qual não se considera a existência de uma essência na realidade inicial que independe de nossa observação, esses elementos serão o resultado da soma de nossas percepções, o que permitirá uma descrição dos fenômenos observados.

Para os nossos propósitos é conveniente ressaltar que esse processo de simplificação pode ainda implicar na explicitação de estruturas dadas pelas relações envolvidas nos fenômenos em estudo. Essa visão estruturalista nos conduzirá ao estabelecimento de uma ontologia da realidade intermediária. Partindo de uma realidade inicial, considerada como dada, chegamos a uma realidade intermediária, que é construída, e sobre a qual se elaborará um modelo.

Notemos que, em função dessa referência filosófico-epistemológica, a modelagem matemática pode ser vista como uma atividade criadora: construir as situações limites adequadas por meio das hipóteses e aproximações simplificadoras. Podemos então dizer que a realidade intermediária está constituída de estruturas.

Seguindo o processo de simplificação, uma representação do que se captou daquela realidade inicial é elaborada usando linguagem natural enriquecida com a linguagem matemática e outros tipos de linguagens como a gráfica, por exemplo. A partir dessa representação daquilo que se elaborou por meio das hipóteses simplificadoras, uma nova representação será procurada ao se 'substituir' a linguagem natural por uma linguagem matemática mais adequada rumo à elaboração do que chamaremos de modelo.

A obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambigüidades, os símbolos e as operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema. (BASSANEZI, 2002, p.25).

A questão de se substituir a linguagem natural por uma linguagem matemática, o que poderíamos denominar transições de linguagem na modelagem matemática, não é algo trivial e neste momento não aprofundaremos nisso.

Notemos que o que será modelado matematicamente não é aquela realidade inicial, mas uma representação da mesma, construída, não dada. Essa representação constitui uma nova realidade, a realidade intermediária, como já introduzida, sobre a qual informações serão explicitadas, problemas serão formulados e resolvidos. A resolução de um problema nessa realidade intermediária pode não ter um correspondente naquela realidade inicial, afinal, “os problemas como são tratados normalmente, são proposições sobre representações e não sobre o fato real”, conforme já nos colocou D’Ambrosio (1999).

Os modelos podem ser considerados teorias sobre a realidade intermediária em estudo e eles usualmente se apresentam através de conjuntos de equações que descrevem essa realidade e, enquanto teorias, reforçamos que eles requerem de uma linguagem adequada para sua formulação.

Uma vez elaborado um modelo matemático, nele são exploradas relações matemáticas conhecidas de situações anteriormente vivenciadas, são desveladas relações ainda encobertas e outras, que se mostrarem pertinentes, podem ser estabelecidas. Obtêm-se assim elementos de uma teoria matemática que pode auxiliar no estudo daquela realidade inicial. Elementos dessa teoria podem ter sido motivados por essa realidade. Outros, porém podem ter sua origem em conjecturas resultantes da manipulação da linguagem utilizada na elaboração das próprias hipóteses simplificadoras, por exemplo. Essas conjecturas podem ser verdadeiras no âmbito da realidade intermediária na qual elas foram criadas, e não o serem na realidade inicial na qual elas serão interpretadas, o que nos traz à tona a questão da relação entre modelo e verdade, entre verdade e realidade, que abordaremos no capítulo 3.

Isso significa que a manipulação do modelo, que é uma das atividades que compõem a modelagem matemática, e de especial interesse para o ensino, pode ser desvinculada, em parte, da realidade tomada inicialmente como objeto de estudo. Embora seja enfatizado que a modelagem é um processo que “culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial” (D’AMBROSIO, 1986, p. 11), ela também precisa valorizar o

tratamento de questões puramente matemáticas, que podem não ter relação com a realidade inicial.

O acesso ao conhecimento matemático é uma das funções da modelagem matemática na educação matemática, que não pode apenas se preocupar em ajudar a resolver problemas 'reais', como já colocamos. Por meio da modelagem matemática pode-se aprender matemática, aprender a pensar matematicamente, a identificar bases filosóficas e epistemológicas de determinadas abordagens, além de conhecer a fecundidade e as limitações de conceitos e métodos matemáticos. De modo especial, como propomos neste estudo, pode-se aprender sobre a aplicabilidade da matemática não somente a outras áreas do conhecimento, mas também na própria matemática.

Para finalizar citemos Bean (2007, p. 42-3) que nos coloca que a modelagem

reconceitualiza e muda a compreensão de fenômenos, ou transforma o enfoque desse entendimento, fundamentando-se em novas hipóteses, premissas ou recortes e transformando o modo como compreendemos e interagimos com o mundo, ou seja, *transforma a realidade*.

2.4 Releitura do Processo de Modelagem Matemática

A partir da identificação e da caracterização do componente realidade no processo de modelagem que o apresentou como passível de ser decomposto em dois, a realidade inicial e a realidade intermediária, propomos uma releitura do processo de modelagem na qual destacamos as três primeiras etapas: a consideração de uma realidade inicial, a construção de uma realidade intermediária e a elaboração de modelos para situações-problema identificadas nesta última.

Naturalmente essas três etapas não dão conta de todo o processo de modelagem matemática que envolve também a solução de problemas, a validação do modelo, ou seja, o confronto dessa solução com a realidade na qual o problema foi levantado, o aperfeiçoamento do modelo conforme ele se mostre limitado ou surjam outras possibilidades de abordagem do mesmo. Enfim, se tomarmos como referência a descrição do processo de modelar apresentada por Bassanezi (2002) e

explorada no item 2.1, vemos que existem outras etapas. Mas estas não serão exploradas neste estudo.

Temos então que no processo de modelagem matemática podemos assumir a existência *a priori* de uma *realidade inicial*, mas cuja verdade nos é possível alcançar apenas através de representações parciais dadas pelos recortes que constituem o que chamamos de *realidade intermediária*.

Podemos entender por realidade inicial o mundo exterior enquanto ser e não enquanto aparecer. Podemos entender por realidade intermediária o que Dewey nos coloca como realidade. “Na sua fórmula mais breve, a realidade [intermediária] torna-se existência, qual gostaríamos que fosse depois que analisamos seus defeitos e decidimos quais devem ser eliminados”.(DEWEY *apud* ABBAGNANO, 2003, p. 833) Dewey ainda chama de ‘realidade plena’ o que nós entendemos por realidade inicial.

As hipóteses e aproximações simplificadoras é que permitirão o surgimento de um recorte da realidade inicial, a realidade intermediária, que é a que será modelada. Ou seja, a realidade intermediária é uma representação recortada da realidade inicial que será modelada matematicamente. É formulada através de hipóteses e aproximações simplificadoras dadas por situações limites, que são obtidas geralmente por intuição sobre a realidade inicial, pois supõem uma escolha. É uma abstração da realidade inicial que supõe a identificação de uma situação bem estruturada desta. Salientamos que o que tem ‘estrutura’, pensada até como um conceito matemático, é a realidade intermediária e não a realidade inicial.

O modelo matemático é uma teoria que, como em muitos casos de realidades não matemáticas, pode estar dada por uma coleção de equações de diversos tipos, algébricas ou diferenciais, dependendo da complexidade do recorte a ser modelado. Ela estará formulada numa determinada linguagem e terá uma lógica subjacente, que poderia estar constituída pelas regras e procedimentos que nos conduzem à resolução dessas equações.

O modelo é então uma forma de “ver” a realidade inicial (através do recorte dela) e é um recurso epistemológico para a sua compreensão. Essa compreensão não significa, em princípio, atingir a verdade a respeito da realidade inicial, que talvez seja inacessível à teoria, mas, dado o caráter aproximativo do recorte (ou representação), revelar uma ‘adequação empírica’ com os fenômenos estudados.

Sobre esses dois conceitos, o de verdade e de adequação empírica falaremos no capítulo seguinte.

A seguir apresentaremos alguns exemplos dessas três etapas do processo de modelagem matemática à luz da interpretação desse processo que fizemos acima.

Como primeiro exemplo temos o estudo da trajetória de um projétil para o qual a *realidade inicial* é o ambiente terrestre onde ocorre o lançamento do projétil. Como *hipóteses ou aproximações simplificadoras* podemos ter:

- a) o pressuposto de que a superfície terrestre é plana (*uma situação limite, e não um caso particular*), e
- b) o pressuposto de que a trajetória do projétil não sofre alteração devido ao atrito com a atmosfera (*outra situação limite*), dentre outros.

Um *modelo* a elaborar neste caso estará dado por meio de um conjunto de equações que descrevam a trajetória do projétil.

Essas equações, que constituem uma teoria para a trajetória do projétil, pelo menos nessa versão simplificada, devem ter suficiente generalidade para envolver muitos casos possíveis. Isso se consegue supondo que informações relevantes como, por exemplo, a velocidade inicial e o ângulo de lançamento, são parâmetros que podem assumir valores relativamente arbitrários.

Para o estudo da trajetória de um satélite artificial, por exemplo, podemos partir dessa mesma realidade inicial, porém utilizando outras hipóteses simplificadoras. Assumindo que o ambiente terrestre é esférico, um outro modelo, dado também por equações, pode ser construído. Em qualquer um desses dois casos, do lançamento de um projétil ou do lançamento de um satélite artificial, o modelo ou teoria só o é do recorte produzido pelas hipóteses simplificadoras, ou seja, da realidade intermediária, e não da realidade inicial.

Também como exemplo podemos citar a cubagem da madeira apresentada em Biembengut e Hein (2003). Do interesse em se calcular a metragem cúbica de madeira que se obterá de um tronco de árvore após o corte da mesma, simplificações são feitas de modo a converter o tronco (realidade inicial) em um objeto tratável matematicamente (a realidade intermediária) e sobre o qual um modelo matemático é elaborado.

Segundo esses autores, no processo de modelagem que leva ao cálculo do volume de madeira, o madeireiro “‘aproxima’ primeiro o tronco (de cone) a um cilindro”. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.110). Notemos que ao supor que o tronco

da árvore possui a forma de um tronco de cone, já se adotou uma hipótese simplificadora, embora isso não seja apontado pelos autores. A partir do comprimento desse tronco de cone (realidade intermediária) e da média dos raios das bases representadas por círculos, faz-se uma nova aproximação, agora a um prisma reto de base quadrada cuja fórmula para cálculo do volume (que é mais simples que a fórmula para o cálculo do volume de cilindro) pode constituir um primeiro modelo matemático que auxiliará na obtenção do volume de madeira procurado. Uma melhor aproximação pode ser obtida considerando-se um prisma reto de base hexagonal para se obter o modelo matemático procurado ou, ainda, considerando-se o tronco como um cilindro. Cada um dos modelos apresenta diferentes tipos de simplificações e pode, de acordo com as atividades do madeireiro ser útil para diversos fins, como sugerem Biembengut e Hein.

Observamos que o madeireiro 'paga' pelo tronco, como se fosse um prisma de base quadrangular, corta-o como um prisma de base hexagonal e 'ganha' efetuando seus cálculos a partir do cilindro, pois o tronco é transformado em madeira e lenha. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.111-2).

Diante dos exemplos que expomos, é importante percebermos que quando se apreende parte da realidade visando a elaboração de um modelo matemático o que se passa a ter é uma nova realidade intermediária, que possui alguma correspondência com a realidade da qual se partiu, porém funciona segundo regras que nela podem ser válidas ou não. Também no início o que se tem é a realidade que se conseguiu captar, e não a totalidade da realidade existente. Ou seja, uma realidade não dada, mas de alguma forma construída. Conforme expôs D'Ambrosio (1999), as representações já são o resultado de uma ação subjetiva, de quem primeiro recebeu ou captou a informação da realidade. O estudante, por exemplo, capta ou concebe a realidade e representa-a a partir do que ele entende e consegue exprimir. Nesse sentido, a atividade de modelagem não começaria na realidade em si, mas no sujeito que a percebe. Essa percepção, conforme Bachelard, pode ser dada pelas concepções e teorias nas quais o indivíduo se apóia. Para que exista uma realidade a ser representada, modelada, seria preciso a ação racional no indivíduo que a concebe. "A ciência suscita um mundo, não mais por uma impulsão mágica imanente à realidade, e sim por uma impulsão racional, imanente ao

espírito.” (BACHELARD, 1988, p.8). Aqui, novamente, o sujeito epistêmico tem seu papel destacado.

Para Bachelard, a atividade científica é uma síntese entre realismo e racionalismo. Ele, ao se referir à atividade científica diz: “se ela experimenta, é preciso raciocinar; se ela raciocina, é preciso experimentar” (BACHELARD, 2000, p. 13). Porém, para ele “o sentido do vetor epistemológico ... vai seguramente do racional ao real e de nenhum modo, ao contrário” (BACHELARD, 2000, p. 13). No processo de modelagem matemática acredita-se ir do real ao racional. Bachelard enfatiza o que denomina “a realização do racional”, o real construído pela teoria. “A experiência científica é assim uma razão confirmada” e “a hipótese é síntese” (BACHELARD, 2000, p. 14). Assim, a natureza da realidade intermediária no processo de modelagem matemática tem o caráter de um real construído como aponta Bachelard.

Para Bachelard, a observação científica reconstrói o real. Por exemplo, do ponto de vista Bachelardiano, a linha geodésica, em geometria, tem mais realidade do que a linha reta (BACHELARD, 2000, p. 25). “A multiplicidade das geometrias contribui de alguma maneira para desconcretizar cada uma delas. O realismo passa de uma ao conjunto” (p. 31). No mesmo espírito do formalismo de Hilbert ou do estruturalismo de Bourbaki, Bachelard diz: “Enquanto relações é que as diversas geometrias são equivalentes. É enquanto relações que elas tem uma realidade e não por referência a um objeto, a uma experiência, a uma imagem da intuição” (p. 31). É o caráter estrutural da realidade intermediária expresso por Bachelard.

Capítulo 3

UMA FUNDAMENTAÇÃO FILOSÓFICA PARA A RELEITURA DO PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

As teorias científicas são representações esquemáticas de coisas mais do que sistemas abstratos ou retratos fidedignos. Em qualquer caso, uma vez que o conceito de representação é uma noção semântica, e como a semântica é um capítulo da filosofia contemporânea, vemos que há um bocado de filosofia sob toda teoria científica.

Realmente há mais do que um bocadinho de filosofia na base das teorias científicas: na análise pode-se descobrir grande número de pressuposições filosóficas. Talvez as mais importantes sejam que existe um mundo externo, que este mundo é regido por leis e que o homem pode conhecer estas leis. (BUNGE, 1974, p.58).

Neste capítulo apresentamos uma fundamentação filosófica da releitura do processo de modelagem matemática realizada no capítulo anterior. Essa releitura tomou como ponto de partida uma análise epistemológica do componente realidade no referido processo.

No capítulo anterior, ao situarmos e analisarmos o componente realidade no processo de modelagem matemática vimos que ele pode ser decomposto em dois: a realidade inicial e a realidade intermediária. Esta última é o resultado de atitudes simplificadoras que buscam estruturar e tornar manipulável intelectualmente a realidade inicial.

No caso do componente realidade no processo de modelagem matemática, uma fundamentação filosófica do mesmo visará identificar qual a sua ontologia, isto é, de que coisas ela trata e qual o *status* de sua existência. Como o componente realidade divide-se em dois, cada um deles exigirá uma fundamentação diferente.

3.1. Pressuposições Filosóficas

Ubiratan D'Ambrosio no prefácio da obra de Bassanezi intitulada *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática* coloca-nos que

a modelagem matemática é matemática por excelência. As origens das idéias centrais da matemática são o resultado de um processo que procura entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas idéias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real. (BASSANEZI, 2002, p.13).

Para nós a modelagem matemática, além de ser matemática é, também, epistemologia, uma vez que os modelos matemáticos “visam entender e explicar fatos e fenômenos observados na realidade”, conforme citação acima, isto é, o conhecimento dessa realidade.

À parte, salientamos que uma das discussões centrais na modelagem matemática como processo é entender como a matemática intervém nele, tanto no caso da modelagem de realidades não matemáticas, onde a matemática é um instrumento, como de realidades matemáticas, isto é, onde a matemática é também uma realidade a ser modelada matematicamente. Notemos a dualidade subjacente a essa situação. Este último caso será analisado no capítulo 4.

Nossa intenção é analisar de um ponto de vista filosófico e epistemológico o próprio processo de modelagem matemática, inicialmente de situações não matemáticas, que são as típicas, e nessa análise identificar as etapas nas quais a matemática intervém e qual sua relação com a linguagem matemática. A matemática não intervém apenas no modelo matemático elaborado senão também na construção da realidade intermediária, pois essa realidade, como veremos, estará constituída por estruturas, sendo elas objetos matemáticos, afinal lidam com relações, regularidades, simetrias, etc.

No caso da modelagem matemática como ferramenta para o ensino de matemática a questão pode ser mais complexa uma vez que, na busca de abordagens mais adequadas a cada nível de ensino, as situações estudadas podem ser bastante artificiais. Mesmo sendo artificiais essas realidades trazem um potencial para o estudo da matemática envolvida no processo de modelagem matemática, seja ela na forma de conteúdos escolares, seja em termos de pensamento matemático que pode ser adquirido ou aperfeiçoado.

A seguir mostramos: 1) como podemos considerar a realidade inicial como dada, apoiando-nos no realismo; 2) de que maneira atribuímos um carácter estrutural a um recorte dessa realidade, a realidade intermediária, apoiando-nos no

estruturalismo; e 3) como podemos situar a experiência nesse percurso, apoiando-nos no empirismo. Para tanto, focaremos nosso estudo nos processos de modelagem matemática de uma realidade não matemática, especialmente uma realidade física. No caso de uma realidade inicial matemática a corrente filosófica que mais se adaptaria a ela é a chamada de platonismo que, no fundo, é um tipo de realismo. Esse caso será analisado, como já mencionamos, no capítulo 4.

No quadro a seguir destacamos os três componentes do processo de modelagem identificados no capítulo 2, relacionando-os às correntes filosóficas que os fundamentarão.

Processo de modelagem matemática	1) Realidade Inicial	Realismo (Existência de essências)
	2) Realidade Intermediária	Estruturalismo (Existência de relações)
	3) Modelo	Empirismo (Relação com a realidade)

3.2. Realismo e Verdade

As condições para aceitação de teorias (modelos) estão atreladas a crenças, pressupostos ou posições filosóficas que sustentam tais condições. Para uma discussão acerca de alguns desses pressupostos lembraremos aspectos principais de dois posicionamentos filosóficos que nos permitem visualizar sob que bases poderíamos propor uma discussão acerca das condições para a aceitação de modelos matemáticos obtidos por meio do processo de modelagem descrito anteriormente, no qual a elaboração de uma realidade intermediária a ser modelada constitui etapa importante e decisiva. As posições que trataremos são a dos realistas e a dos não realistas, nas versões próprias da teoria da ciência do século XX. Nessas versões a denominação realismo científico para os realistas é a mais adequada.

Para um realista (científico) uma teoria científica, um modelo no nosso caso, é um relato verdadeiro, ou aproximadamente verdadeiro, de como o mundo é. Uma

teoria é aproximadamente verdadeira, segundo Dutra (2003), quando não se acredita que o conhecimento avançou suficientemente para atingir a verdade.

Os realistas assumem uma concepção de verdade como correspondência, entre a teoria ou modelo e a realidade inicial que supostamente descreve, e sustentam a existência das entidades postuladas por suas teorias, mesmo que elas sejam inobserváveis. Por exemplo, uma teoria da microfísica que trata de “elétrons, prótons e nêutrons, etc.; se ela é aproximadamente verdadeira, então, segundo o realista científico, tais entidades realmente existem e são da maneira como a teoria as descreve.” (DUTRA, 2003, p. 16).

No nosso caso, os objetos construídos na teoria cuja existência real é afirmada pelos realistas são objetos da realidade intermediária, uma vez que são os constructos teóricos. Se eles existem ou não na realidade inicial dependerá de sua observabilidade que, por sua vez, depende da teoria que a sustenta.

Em oposição aos realistas estão os não realistas, ou anti-realistas, para os quais uma teoria científica é, no máximo, um bom instrumento de predição, que pode funcionar bem empiricamente, mesmo não se aproximando da verdade. Para os anti-realistas a aceitação de uma teoria pressupõe que ela dê conta dos fenômenos, ou seja, dos observáveis. Desse modo uma condição do anti-realista para que uma teoria seja aceita é que ela seja adequada empiricamente. O conceito de ‘adequação empírica’ desempenha para os anti-realistas o mesmo papel que desempenha o conceito de ‘verdade’ ou ‘verdade aproximada’ para os realistas.

Para os realistas a verdade é uma forma de acesso à realidade. A concepção de verdade subjacente a essa corrente filosófica é a correspondencial. Para essa concepção uma afirmação numa teoria seria verdadeira se ela expressa um fenômeno que ocorre na realidade. Na relação do modelo com a realidade intermediária há um certo realismo: acredita-se que as entidades que são descritas na teoria “realmente” existem na realidade intermediária. No processo de modelagem matemática, os modelos são teorias que refletem a realidade intermediária. Logo, a verdade deles só pode estar em relação com essa realidade e não com a realidade inicial. Mesmo não havendo uma relação de verdade entre o modelo e a realidade inicial a percepção dessa limitação pode ser útil do ponto de vista da construção do conhecimento. Por exemplo,

se atentarmos para as ciências empíricas, logo constataremos o fato de que elas lançam mão de teorias que são falsas do prisma correspondencial. [...] [Elas] utilizam-se de leis, hipóteses e teorias que sabidamente não reproduzem a realidade. Há teorias, até, que mesmo após terem sido abandonadas, como falsas, ainda hoje podem ser usadas para captar o real de maneira aproximada; é o que se dá, por exemplo, com o sistema de Ptolomeu: suas previsões, dentro de limites que lhe são próprios, permanecem sendo aceitáveis. (DA COSTA, 1997, p. 128).

Quando tratamos da aceitação de teorias científicas podemos nos perguntar sob que condições tais teorias devem ser aceitas. Além disso, o que significa aceitar uma tal teoria? Em modelagem matemática poderíamos nos perguntar: em que condições devemos aceitar um modelo, que é uma teoria?

Na visão tradicional e vulgar da aceitação de teorias científicas as mesmas são aceitas ou não devido à sua capacidade de dizer a verdade, como mencionamos antes.

Mas de acordo com Dutra (2003, p. 29) “muito mais está envolvido na aceitação de teorias científicas que meramente a capacidade que elas talvez tenham de se aproximar da verdade, ou de produzir um relato fidedigno do mundo. ”Há fatores epistêmicos, referentes por exemplo à capacidade explicativa da teoria, à sua plausibilidade em relação a outras teorias já aceitas, além de fatores sociais, psicológicos, etc..

Se a verdade é um critério para a aceitação de uma teoria, no nosso caso, de um modelo, então podemos nos perguntar, como se estabelece a verdade?

Retomando elementos do desenvolvimento histórico da matemática, podemos destacar uma fase de desvinculação entre uma realidade a ser estudada matematicamente e a matemática utilizada para descrevê-la.

Se tomarmos os trabalhos dos matemáticos gregos, em especial os *Elementos* de Euclides, vemos que havia uma crença na isomorfia entre a realidade observável e a matemática que a descrevia. Foi com a criação das geometrias não-euclidianas, no séc. XIX, que a matemática despontou “não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos” (EVES, 2004, p. 545), mas também como uma criação do espírito humano. Hoje podemos dizer que o que se consegue ter são aproximações, ao invés de um isomorfismo entre a matemática e a realidade.

Com o descobrimento das geometrias não-euclidianas muitos questionamentos surgiram acerca da possibilidade das estruturas matemáticas que

se conhecia representarem adequadamente o real, pois um fato, comumente aceito desde a época dos gregos, é que a geometria de Euclides refletia, de certo modo, o espaço real.

A partir desses questionamentos a matemática que se conhecia até então passara por uma profunda análise crítica que provocou a busca de novas fundamentações para ela, para o modo como se construíam ou como surgiam os entes matemáticos, como se estruturavam as teorias e como se validavam suas proposições. Um dos resultados desses esforços foi uma espécie de separação dos aspectos formais da matemática daqueles que podemos chamar de intuitivos, porque estão relacionados à nossa capacidade de percebê-los no mundo em que vivemos, ou à nossa capacidade de imaginação e interpretação. Surge então uma nova forma de conceber a relação entre realidade e matemática.

Em sua obra intitulada *Fundamentos da Geometria*, publicada em 1899, David Hilbert apresenta a geometria euclidiana sem conexão com a realidade espacial. O que se obtinha é que as relações apresentadas e demonstradas eram coerentes. A noção de verdadeiro ou falso só teria sentido quando tais relações fossem interpretadas em algum contexto. Para saber se uma dada afirmação de uma teoria é verdadeira recorreremos a uma interpretação dessa teoria. Essa interpretação pode ser feita, por exemplo, na nossa realidade observável. Mas também pode ser feita em um outro campo da própria matemática. A verdade é então relativizada, de modo que algo que se apresente verdadeiro em um contexto pode não sê-lo em outro.

Não é difícil encontrar, em textos que tratam de modelagem matemática na educação matemática, referências à questão da verdade. Uma delas é a de Biembengut e Hein (2007, p. 46): “Quando se modela uma situação, busca-se a verdade naquele instante, naquela realidade.”

No entanto, se atentarmos para o significado de verdade segundo os padrões científicos, por exemplo, a concepção de verdade como correspondência, nem sempre é acerca dela que se está falando no caso mencionado acima.

Essa diferenciação pode parecer desnecessária nos níveis de ensino fundamental e médio, mas é relevante quando se busca uma melhor compreensão dos métodos utilizados na estruturação de teorias matemáticas e científicas em geral. E essa compreensão, no caso do processo de modelagem matemática, pode ser importante também para a formação de um professor de matemática.

Da Costa (1997) discute outras duas abordagens para a noção de verdade em ciência além da correspondencial: a pragmática e a coerencial. No sentido pragmático a verdade também é denominada quase-verdade por esse autor.

Informalmente, define-se a verdade correspondencial como o acordo entre pensamento e objeto, entre sentenças e fatos. [...] Há, por outro lado, um conceito de verdade, de índole pragmatista, de conformidade com o qual a sentença S é pragmaticamente verdadeira, em um domínio do saber D, se, dentro de certos limites, S salva as aparências em D ou, em D, tudo se passa como se ela fosse verdadeira segundo a teoria da correspondência. Em determinadas circunstâncias, S é quase-verdadeira simplesmente porque S é verdadeira correspondencialmente falando; isto se passa, v.g. quando S é sentença observacional. (DA COSTA, 1997, p. 128-9).

Para a noção de verdade coerencial, verdade é uma relação de coerência entre um enunciado e dado sistema de enunciados ou crenças. Sobre essa noção complementa:

As diversas concepções coerenciais têm poucos traços em comum, geralmente se apoiando em pressupostos metafísicos. Talvez a característica mais marcante seja a seguinte: verdade é uma relação de coerência entre um enunciado e dado sistema de enunciados ou crenças; o enunciado S é verdadeiro em relação ao sistema proposicional K, se S for coerente com K, o que implica ser S consistente com K e, se não pertence a K, deve ampliar este último de modo coerente. [...] Em caso contrário, S é falso com referência a K. (DA COSTA, 1997, p. 141).

A partir do exposto nesta seção vemos que a verdade das teorias, isto é, dos modelos, dizem respeito à realidade intermediária. Poderíamos então nos perguntar como se relacionam essas teorias (modelos) com a realidade inicial. Uma hipótese que temos é a de que entre os modelos e a realidade inicial caberia a relação de adequação empírica. Sobre isso falaremos na seção 3.4.

3.3. Estruturalismo e Realidade Intermediária

Na visão de Granger estrutura é “um conjunto de elementos quaisquer, portanto abstratos, entre os quais (ou entre alguns de seus subconjuntos) tiverem sido definidas relações igualmente abstratas.”(ABBAGNANO, 2003, p.376). Na visão de Levi-Strauss é “algo que constitui a *ordem* ou a *substância* da realidade em

exame e, portanto, determina necessariamente todas as suas determinações, de tal forma que as torna infalivelmente previsíveis.” (p.377) Com base nessas duas visões o *estruturalismo* pode ser tido como “todo método ou processo de pesquisa que, em qualquer campo, faça uso do conceito de *estrutura*.” (p. 377-8).

A abordagem estruturalista traz elementos importantes à nossa discussão e, segundo Lacerda Araújo (2003), tem sua origem na França, na lingüística e em Saussure, em torno de 1950. Uma das contribuições de Saussure foi pressupor no elemento (a parte) o sistema ou estrutura (o todo), mostrando que o estruturalismo não se trata de um atomismo.

Cada elemento do sistema, além de revelá-lo, só adquire sentido no interior do sistema e por referência a outros elementos. Nada tem significação em si e por si só, mas sim por não ser outro. O princípio de diferenciação está na base deste tipo de pensamento. A coisa não vale pelo que ela é, mas por sua relação opositiva com os outros elementos. [...] Trata-se de uma identidade puramente relacional... (LACERDA ARAÚJO, 2003, p.123).

Ainda nessa direção a autora complementa:

Os elementos da estrutura dependem das regras que regem a totalidade, portanto, seu modo de relacionar-se, seus processos de composição, conferem à totalidade seu caráter de, ela própria, estar sempre se configurando, se transformando. Ela não subjaz aos elementos nem é resultado de uma soma das partes. (LACERDA ARAÚJO, 2003, p.126).

Para Barthes, conforme Lacerda Araújo (2003, p. 120)

...o estruturalismo não é uma escola, mas uma atividade de decomposição e composição do real, para fazer aparecer no objeto decomposto o inteligível. Este inteligível é o intelecto humano acrescentado ao objeto, portanto, a história, a cultura, o valor humano. Inquirir o psiquismo, a sociedade primitiva, a arte, a literatura, [isto é, uma realidade inicial] para neles descobrir invariantes universais responsáveis pelo sentido e pela forma, esta é a finalidade do método estruturalista.

Lacerda Araújo (2003, p.133) justifica o uso do estruturalismo em ciência da seguinte maneira:

A possibilidade de se fazer ciência, de se formalizar, ou seja, de encontrar as estruturas universais, inconscientes e variantes, caracteriza o método estruturalista. A estrutura não é pura forma já que resulta de uma investigação objetiva; cumpre assim, uma finalidade analítica. [...] ao permitir a compreensão da totalidade [...] fornece, além de uma explicação analítica, uma visão crítica da realidade.

No desenvolvimento da matemática podemos visualizar uma antecipação do estruturalismo representada pelas contribuições de Hilbert nos finais do séc XIX, enfatizando a matemática, em particular a geometria, como o estudo das relações e não das coisas.

Em seguida, com o grupo Bourbaki, o caráter estruturalista da matemática é acentuado com a concepção de matemática como a teoria das estruturas, que tem se revelado promissora na reconstrução da matemática do séc. XX.

Para nós, a palavra chave da abordagem estruturalista da matemática é 'isomorfismo', ressaltando que o que importa não é o conteúdo, mas a forma. Portanto, um axioma epistemológico do estruturalismo pode ser colocado por meio da seguinte afirmação: não podemos conhecer além da estrutura, ou seja, não é possível conhecer as essências, só as estruturas. Se duas estruturas são isomorfas elas são consideradas a mesma, independentemente de suas naturezas particulares. Esse axioma permite-nos justificar a introdução da realidade intermediária no processo de modelagem matemática como etapa essencial para atingir o conhecimento do real.

Lacerda Araújo (2003) apresenta-nos uma forma de entender o que estamos denominando realidade intermediária, salientando seu caráter estrutural, embora a chame de modelo. Ela firma que

A forma representa, para o estruturalismo, uma etapa no estudo do próprio objeto para captar, através de redes de relações, seus traços imanentes. O fim da pesquisa, no entanto, é atingir o concreto. A forma, o modelo, são seu meio necessário. A própria estrutura faz parte do real, do real pensado [no sentido de Bachelard]. Não se restringe à pura realidade empírica [ou inicial]. Esta é apresentada como um conjunto caótico, desordenado, que a análise ordena e estrutura. Sendo a estrutura a sintaxe das transformações possíveis, conhecê-la representa um formidável esforço na direção do aprofundamento nas determinações do concreto já-pensado.

Conhecer a combinatória dos elementos resulta na forma. Obter a forma é descortinar o sentido pelo qual se interpretará a realidade. Esta nunca contém por inteiro o seu próprio sentido. Aí reside a contribuição principal do estruturalismo à filosofia, [...] e também sua vocação crítica; formalizar é interpretar. (LACERDA ARAÚJO, 2003, p.134).

Para nós, como veremos, modelo é diferente de estrutura. Modelo é uma teoria que visa à descrição das estruturas, descrição que pode ser dada por equações ou axiomas. A teoria por sua vez envolve conceitualizações.

A relação entre estrutura e realidade pode ser compreendida de formas diferentes pela via estruturalista. A primeira delas “ressalta o dinamismo das estruturas, concluindo que sua realidade consiste em estruturas, desestruturas, reestruturas, não correspondendo ponto a ponto com a realidade [inicial]; a estrutura apenas apresenta fatos de uma realidade que subjaz a ela.” (LACERDA ARAÚJO, 2003, p.127). Essa posição é denominada, pela autora, de estruturalismo genético. Na segunda, nas palavras de Levi-Strauss, “a estrutura nunca existe na realidade concreta, mas é ela que define o sistema de relações e transformações possíveis dessa realidade.” (LEVI-STRAUSS *apud* LACERDA ARAÚJO, 2003, p.127). Ou seja, o dado imediato não fala por si, é construído pela linguagem científica que procura dar conta do real. Essa posição é denominada, pela autora, de estruturalismo de modelo. Ambas posições apontam para o fato de que a estrutura não faz parte da realidade inicial, afinal a “estrutura não designa o resultado de uma pesquisa empírica sobre a realidade concreta, mas a regra ou regras que regem as modificações e as configurações dos elementos de um sistema.” (LACERDA ARAÚJO, 2003, p.128)

Segundo Lévi-Strauss, a noção de estrutura não se refere à realidade empírica, mas aos modelos (no nosso caso, a realidade intermediária) construídos em conformidade com esta. Assim sendo, ele coloca algumas condições para que os modelos sejam concebidos como estruturas, dentre elas a de que uma modificação qualquer em um elemento do sistema acarreta uma modificação de todos os outros. Essa condição reflete o caráter relacional das estruturas. Outra condição é a de que se pode prever de que modo reagirá o modelo em caso de modificação de um de seus elementos. Além disso, o modelo deve ser construído de tal modo que seu funcionamento possa explicar todos os fatos observados. A função explicativa revela o caráter aproximativo do modelo (LÉVI-STRAUSS *apud* LACERDA ARAÚJO, 2003, p.129).

A construção da realidade intermediária no processo de modelagem matemática é, de fato, uma atividade estruturalista no sentido que a coloca Lacerda Araújo (2003, p. 127-8):

a finalidade da atividade estruturalista seria a reconstrução do objeto para nele descobrir funções; imitar, fazer um modelo, um simulacro desse objeto numa decomposição, para em seguida, de posse de um modelo, reconstruí-lo [...] O simulacro confere ao objeto o estatuto de objeto

construído pelo intelecto. Não se trata de puro empirismo mas de uma fabricação, fruto da criação e da reflexão.

Silva (2007) traz-nos uma visão do estruturalismo, que não aprofundaremos neste momento, mas que nos incita a novos estudos nessa direção. Segundo esse autor, o estruturalismo é uma versão recente do platonismo, “não por propor a existência de objetos matemáticos (números, conjuntos e outros), mas de *estruturas* matemáticas, esquemas relacionais vazios que podem ser ‘preenchidos’ por quaisquer objetos que existem efetivamente, como querem os realistas.” (SILVA, 2007, p. 71)

3.4. Os Modelos e a Adequação Empírica

O seguinte exemplo do processo de modelagem apresentado em Bassanezi (2002) permite-nos visualizar a construção da realidade intermediária, o papel das hipóteses simplificadoras, sua linguagem e a linguagem matemática dos modelos, que é mais formal. O processo de modelagem nesse caso é motivado pelo interesse em se calcular o volume de uma maçã (problema proposto).

Temos então uma realidade inicial de natureza não matemática a partir da qual podemos construir diferentes realidades intermediárias sobre as quais modelos matemáticos serão elaborados. Para cada uma dessas realidades, e seus respectivos modelos, há um nível de complexidade maior no que diz respeito à linguagem matemática utilizada no modelo e a linguagem utilizada para a construção da própria realidade intermediária correspondente.

Uma primeira realidade intermediária pode ser construída a partir da hipótese de que a maçã possui uma forma esférica podendo, portanto, o modelo procurado ser dado pela seguinte fórmula do volume de uma esfera na qual r representa o raio da mesma:

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Uma segunda realidade intermediária pode ser construída considerando a maçã como um sólido de revolução, cujo modelo matemático que dará o volume desse sólido será dado pelo teorema de *Pappus* que afirma o seguinte:

Seja Ω uma região plana situada no mesmo plano de uma reta r e totalmente contida em um dos lados determinados por r . Seja h a distância entre o centróide de Ω e a reta r , e A a área de Ω . Então, o volume V do sólido de revolução, gerado pela rotação de Ω ao redor do eixo r , é dado por $V = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot A$.

A obtenção do volume da maçã com base no teorema de *Pappus* envolverá o uso de técnicas de integração, revelando um modelo cuja linguagem empregada na construção do mesmo é mais complexa que a linguagem do modelo anterior.

Qual dos dois modelos é verdadeiro? Obviamente esses modelos são verdadeiros em relação às realidades intermediárias correspondentes. Quanto à verdade em relação à realidade inicial, em vez de dizermos que o segundo modelo é mais verdadeiro em relação à maçã, podemos dizer que o segundo modelo é mais adequado empiricamente, uma vez que a adequação empírica implica em verificar em que medida o modelo obtido modela a realidade inicial, e não se é verdadeiro em relação a ela. Não é nossa intenção aqui explicar como estabelecer esse tipo de adequação.

Uma teoria científica é aceita, em geral, porque se acredita que “ela é eficiente para prever com determinada precisão fenômenos ainda não observados.” (DUTRA, 2003, p. 16). Além disso,

A teoria prevê que certos fenômenos deverão ocorrer de determinada maneira, e isto é aproximadamente o que se pode constatar.

Quando este é o caso, costuma-se dizer que a teoria é *empiricamente adequada*, ou que ela salva os fenômenos, que ela dá conta dos fenômenos observados. (DUTRA, 2003, p. 16).

A realidade intermediária é composta por estruturas atribuídas aos fenômenos observados. Tanto os observados como os não observados podem estar relacionados à adequação empírica. A generalidade do modelo permite que ele sirva tanto para os casos observados como para outros parecidos. No caso do segundo modelo que expusemos, referente à consideração da maçã como um sólido de

revolução, o que inclui o primeiro caso no qual uma aproximação da maçã é dada por uma esfera, ele seria mais aceito em relação ao primeiro, pois permite prever melhor as coisas não observadas, por exemplo calcular o volume de maçãs ou outras frutas de formatos diferentes do dado.

Para Bas van Fraassen uma teoria é empiricamente adequada se ela é verdadeira em relação às coisas observáveis. Como a observação é o primeiro passo para a construção da realidade intermediária, então no nosso caso, como já vimos, se ela é verdadeira ela só o é em relação à realidade intermediária. Porém é empiricamente adequada em relação à realidade inicial.

Van Fraassen nos coloca ainda que, se uma teoria emprega termos, como 'elétron', por exemplo, embora denotem objetos determinados, não são *reais*, mas apenas *ficções*. Podemos entender a nossa realidade intermediária com esse caráter ficcional onde os personagens não necessariamente existem na realidade inicial. Obviamente uma teoria científica possui um compromisso *maior* com a realidade, diferente do que ocorre com um romance. De uma teoria científica são exigidas qualidades que em geral não são exigidas de uma obra literária. Dentre tais qualidades "não está a verdade das teorias científicas, e sim apenas sua adequação empírica." (DUTRA, 2000, p. 35)

"Empiricamente adequado" pode ser entendido como a possibilidade de *verificar* as manifestações ou conseqüências experimentais das hipóteses, embora não possamos garantir que as entidades nas quais essas hipóteses se baseiam existam na realidade. Essas entidades podem ser inobserváveis. Duas teorias diferentes, isto é, baseadas em diferentes entidades, poderiam ter as mesmas conseqüências experimentais: os sistemas de Ptolomeu e Copérnico, por exemplo.

A distinção entre 'verdade' e 'adequação empírica' baseia-se no conceito de 'observável'. Uma teoria científica é empiricamente adequada, segundo van Fraassen, se ela *salva os fenômenos*, isto é, se ela dá conta dos observáveis. Numa forma simples, podemos entender 'observável' como aquilo que é acessível ao sujeito epistêmico (o ser humano), já seja através de instrumentos (que ampliam a nossa percepção) ou de teorias.

Para Bachelard (2000, p. 18-19)

a observação tem necessidade de um *corpo* de precauções que levam a refletir antes de olhar [...] A observação científica é sempre uma observação polêmica; ela confirma ou infirma uma tese anterior, [...] ela

mostra demonstrando; [...] ela reconstrói o real após ter reconstruído seus esquemas. Naturalmente, desde que se passe da observação à experimentação, o caráter polêmico do conhecimento torna-se mais claro ainda. Então, é preciso que o fenômeno seja escolhido, filtrado, depurado, vazado no molde dos instrumentos, produzido no plano dos instrumentos. Ora, os instrumentos não são senão teorias materializadas. Deles saem fenômenos que trazem por todos os lados a marca teórica.

Podemos dizer que a adequação empírica sugere uma referência ao conceito de verdade pragmática como apresentado por Da Costa (1997), o qual mencionamos anteriormente.

O pensamento matemático envolve tanto a intuição quanto a lógica, a primeira mais ligada aos processos de descoberta matemática, os quais requerem o desenvolvimento da capacidade de imaginação, e a segunda mais do lado do discurso e da sistematização. No processo de construção da realidade intermediária, enquanto ela é constituída de situações limite, requer-nos fortemente das capacidades imaginativas da nossa intuição. Porém, na elaboração do modelo que descreverá essa realidade intermediária precisamos de nossas capacidades de organização e sistematização, nas quais a lógica terá um papel fundamental. Essa etapa, portanto, requer de uma certa precisão da linguagem a ser utilizada.

Na seqüência daremos um exemplo de como, mesmo em situações iniciais não matemáticas, é possível elaborar um modelo de caráter axiomático. Esse exemplo também é uma resposta ao conhecido sexto problema de Hilbert.

Em 1900, no II Congresso Internacional de Matemáticos que foi realizado em Paris, David Hilbert expôs em uma comunicação uma lista de 23 problemas matemáticos relevantes a serem investigados no decorrer do séc. XX. Tal lista influenciou profundamente o desenvolvimento da matemática a partir de então. O sexto desses problemas previa a possibilidade de axiomatização da física clássica. Mas conforme Ferreira J. (2003, p. 63), “[a ênfase deste problema] está muito mais em estabelecer uma filosofia científica do que enunciar uma tarefa técnica, e tem muito mais a característica de um desafio programático do que uma questão com resposta específica.”

Um exemplo de empenho nessa direção é dado pela forma axiomática de tratar a mecânica clássica de partículas proposta por Suppes, McKinsey e Sugar em 1953 e apresentada em Krause (2002, p. 44). Essa versão axiomática é dada pelo que Newton da Costa chama de Predicado de Suppes, o que na nossa discussão

refere-se a um modelo de caráter axiomático para uma realidade intermediária dada por uma estrutura que descreve a mecânica newtoniana de partículas.

Um predicado de Suppes é a forma lingüística numa determinada linguagem formal, por exemplo, a conjuntista, da descrição da estrutura.

A seguinte estrutura Π refere-se a um sistema de mecânica de partículas:

$$\Pi = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$$

Nela, P é um conjunto não vazio cujos elementos são partículas e T é um conjunto de números reais que denota um intervalo de tempo. Além disso, temos as seguintes funções: $s(p, t)$, (ou $s_p(t)$) que fornece a posição de uma partícula $p \in P$ num instante $t \in T$; a função $m(p)$ que representa a massa da partícula $p \in P$; a função $f(p, q, t)$ que representa a força interna ao sistema que a partícula q exerce sobre a partícula p no tempo t ; e a função $g(p, t)$ que representa a força resultante externa agindo sobre a partícula p no instante t . Uma interpretação dessa estrutura nas palavras do próprio Suppes é:

Considere duas partículas consistindo dos planetas Terra e Vênus. Então a força interna sobre a Terra é a atração gravitacional de Vênus, e a força resultante externa sobre a Terra é o vetor soma das forças atrativas gravitacionais de todos os outros corpos do sistema solar (e do resto do universo para este caso). (SUPPES *apud* KRAUSE, 2002, p. 44).

Os axiomas que descrevem o que ocorre na realidade intermediária dada por essa estrutura são:

A1: O conjunto P é finito e não vazio.

A2: T é um intervalo de números reais.

A3: Para cada $p \in P$, a função s_p é duas vezes diferenciável em relação a T

A4: Para cada $p \in P$, $m(p)$ é um número real positivo.

A5: Para cada $p, q \in P$ e cada $t \in T$, $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.

A6: Para cada $p, q \in P$ e cada $t \in T$, $s(p, t) \cdot f(p, q, t) = -s(q, t) \cdot f(q, p, t)$.

A7: Para cada $p \in P$ e cada $t \in T$, $m(p) \cdot D^2 s_p(t) = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

O axioma A4 coloca-nos que a massa de uma partícula é um número real positivo. Os axiomas A5 e A6 expressam versões da terceira lei do movimento de Newton, segundo a qual a toda ação corresponde uma reação de mesma intensidade, porém em sentido contrário. Os axiomas A3 e A7 expressam a segunda lei do movimento de Newton segundo a qual a soma das forças que atuam sobre o sistema é dada pelo produto da massa pela aceleração.

O predicado de Suppes é de tal generalidade que admite outras interpretações além da estrutura dada. Isso é próprio do caráter axiomático do modelo elaborado.

3.5. Uma Visão Empirista do Processo de Modelagem Matemática

O empirismo é uma exigência metodológica que assume uma feição nova no contexto teórico do estruturalismo, confirma-se. [...]

A partir de dados concretos imediatos, construímos um modelo e, de posse deste modelo, voltamos ao concreto, para nele descobrir novas relações. Só assim a investigação terá valor heurístico. (LACERDA ARAÚJO, 2003 p.132).

O empirismo é uma corrente filosófica para a qual “a experiência é critério ou norma de verdade” (ABBAGNANO, 2003, p. 326). Na nossa releitura do processo de modelagem matemática podemos considerar a realidade inicial como realidade empírica, entendendo empírico como algo relativo à experiência, suscetível de observação, em qualquer contexto.

A experiência, conforme Abbagnano (2003), pode ser tomada como intuição ou como método. “A teoria da experiência como intuição considera a experiência como o relacionar-se *imediato* com o objeto individual, usando como modelo da experiência o sentido da visão. Desse ponto de vista um objeto ‘conhecido por experiência’ é um objeto presente em pessoa e na sua individualidade.” (p.408). Já “a teoria da experiência como método considera-a operação (mais ou menos complexa, nunca elementarmente simples) capaz de pôr à prova um conhecimento e capaz de orientar sua retificação.” (p.411) É nesse segundo sentido que utilizaremos o termo experiência. Notemos que intimamente ligado ao conceito de ‘experiência’

está o de 'observação'. Mas, experiência não é só observação, implica também em produção.

A observação é o primeiro passo na construção da realidade intermediária. Observar é estruturar a realidade intermediária. Como bem coloca Fourez (1995), a observação não é passiva, ela envolve uma organização da visão e, conforme já colocamos, implica em seleções.

Em suma, para observar, é preciso sempre relacionar aquilo que se vê com noções que já se possuía anteriormente. Uma observação é uma *interpretação*: é integrar uma certa visão na representação teórica que fazemos da realidade. (FOUREZ, 1995, p.40).

Ou seja, há um aspecto teórico cultural implícito que nos permite interpretar o que observamos, "observar é fornecer-se um *modelo teórico* daquilo que se vê." (p.42).

Podemos dizer que há um certo ponto de vista construtivista na constituição da realidade intermediária uma vez que "a significação de um acontecimento ou a configuração das entradas dos dados é construída pelo indivíduo." (ARNKOFF *apud* FOUREZ, 1995, p.41)

No processo de construção da realidade intermediária, as aproximações simplificadoras, como já vimos, conduzem a situações limites. Elas, portanto, não são diretamente obtidas por observação, pois possivelmente não acontecem na realidade inicial, mas requerem de imaginação para sua formulação, são resultado de uma produção. A habilidade de formular hipóteses e aproximações simplificadoras lida com a intuição matemática ou física do sujeito e requer a utilização do pensamento interpretativo e criativo para formulá-las.

A modelagem matemática, mais do que uma metodologia é uma atividade, uma praxis dinâmica dentro do fazer matemático. Conforme a proposta de Bean (2001), a modelagem matemática está mais perto de uma ciência experimental, desde que se utiliza de noções como 'sistema', 'hipótese', 'aproximação', etc.

Isso permite apoiarmo-nos numa visão empirista da ciência a fim de fundamentarmos a releitura do processo de modelagem matemática que fizemos. Todos os elementos do empirismo discutidos aqui serão traduzidos por analogia, no seguinte capítulo, ao caso da matemática tomada como realidade inicial.

Nas ciências empíricas o cientista “... formula hipóteses ou sistemas de teorias, e submete-os a teste, confrontando-os com a experiência, através de recursos de observação e experimentação.” (POPPER, 1972, p.27)

Como parte do processo de modelagem matemática, visto de uma forma empírica, está a elaboração de conjecturas. Elas podem ser confundidas com as hipóteses, mas na verdade elas são parte do modelo. As hipóteses são assumidas e as conjecturas devem ser testadas, por isso ainda não possuem o valor de verdade. Num modelo de caráter axiomático as conjecturas são os axiomas desse modelo. Num modelo de caráter equacional as conjecturas são as equações iniciais do modelo.

3.6. Sobre a Relação entre Verdade e Linguagem

Segundo Henkin (1975), a verdade é uma propriedade que pode ser atribuída a sentenças que transmitem informações sobre algum assunto, seja ele empírico ou abstrato. A questão de se saber o que se pretende dizer ao afirmar que uma sentença é verdadeira pode ser encontrada em vários trabalhos filosóficos. No âmbito da matemática, Alfred Tarski elaborou uma teoria da verdade formal, isto é, da verdade de sentenças de uma linguagem formalizada.

Na concepção de Tarski, uma noção de verdade a ser aplicada a sentenças de uma linguagem natural, por exemplo, pode ser expressa em termos de uma relação entre as sentenças e o assunto a que elas se referem. Sentenças são certas expressões simbólicas elaboradas em alguma linguagem. Para que essa relação seja adequada é necessário que ela especifique para cada sentença as condições que a tornam verdadeira em certo domínio. Por exemplo, a sentença “Curitiba é a capital do Paraná” será verdadeira se, de fato, a cidade Curitiba for a capital do Paraná, que será a condição que, caso seja satisfeita, dará à sentença o caráter de verdadeiro. Se admitirmos que o conjunto de todas as sentenças é finito, então especificar uma noção de verdade se reduz a elaborar uma longa lista com as condições de verdade para cada uma delas. Mas, embora possamos pensar em um conjunto finito de sentenças elaboradas até hoje, nosso conhecimento acerca da linguagem que utilizamos para formulá-las mostra ser possível elaborar um número

ilimitado de sentenças. Diante disso, a noção de verdade acima considerada não se mostra satisfatória. Nesse caso, para tratar de uma infinidade potencial de sentenças necessitamos de uma outra formulação para a noção de verdade, coloca-nos Henkin.

Sabendo que cada sentença é construída a partir de um conjunto finito de símbolos e segundo certas normas gramaticais, podemos especificar as condições de verdade apenas para aquelas sentenças consideradas elementares, ou “mais curtas”, a partir das quais seriam construídas as sentenças mais complexas. Para decidir sobre a verdade destas últimas, poder-se-ia recorrer ao que os matemáticos chamam de ‘definição recursiva’, ou seja, baseada em uma análise estrutural das sentenças. A definição então “indicaria de que modo as condições de verdade poderiam ser consideradas no caso de qualquer sentença complexa S, através das condições de verdade aplicáveis às componentes elementares em que S se desdobra” (HENKIN, 1975, p. 57).

Mas essa idéia também apresenta alguns obstáculos. Um deles seria caracterizar o significado de ‘sentença’ em linguagens que possuem regras gramaticais complicadas e até mesmo imprecisas, o que pode ocorrer em modelagem matemática. Por exemplo, no caso de modelos dados por equações diferenciais. Um outro obstáculo seria a presença de paradoxos que podem surgir quando se procura determinar se uma sentença que faz alguma afirmação sobre ela mesma é verdadeira ou falsa. Por exemplo, a sentença “Esta afirmação é falsa” é verdadeira se aquilo que ela afirma é verdadeiro. Mas se aquilo que ela afirma é verdadeiro então a sentença é falsa. Ou seja, admitindo que a sentença é verdadeira, concluímos que ela é falsa e vice-versa. Isso leva-nos a considerar que a sentença é verdadeira e falsa simultaneamente, o que contradiz a idéia que comumente se tem sobre a distinção entre sentença falsa e sentença verdadeira.

Os dois obstáculos apresentados manifestam a impossibilidade de “apresentar uma definição satisfatória de ‘sentença verdadeira’ capaz de abranger a totalidade das sentenças de uma linguagem natural.”(HENKIN, 1975, p. 58), no nosso caso, de uma linguagem adequada aos modelos que se pretende construir.

Foi a partir da atenção que Alfred Tarski deu a esse fato, que ele formulou uma definição de ‘sentença verdadeira’, matematicamente precisa, restringindo-se a certas linguagens artificiais ou formais. Tais linguagens, próprias, por exemplo, de teorias axiomáticas formais, são apoiadas em um formalismo composto por “uma

lista explícita de símbolos, distribuídos em várias classes, e uma lista de regras formais que ditavam quais os modos por que os símbolos se combinariam para construir as sentenças.” (HENKIN, 1975, p. 62). No entanto, uma linguagem desse tipo pode exprimir somente uma porção das idéias que comumente são formuladas em linguagens naturais, como o português, por exemplo.

Adicionando a uma linguagem os axiomas de alguma teoria e as regras de inferência fornecidas por uma lógica subjacente a essa teoria, torna-se possível elaborar demonstrações formais nessa teoria e, a partir disso, decidir se uma dada sentença é também válida (demonstrável) ou não.

No caso da modelagem matemática, por exemplo, na elaboração de um modelo (teoria) de um fenômeno físico, usualmente são formuladas equações de diversas complexidades para a descrição desse fenômeno. Essas equações podem ser consideradas sentenças formuladas na linguagem da teoria em questão e, para elas, também faz sentido perguntar sobre sua verdade e até sobre alguma “lógica” subjacente (num sentido mais amplo que aquele das linguagens formais).

O modelo pode ser meio para atingir a verdade acerca da realidade intermediária, não da realidade inicial. Como no caso da modelagem matemática os modelos são teorias, não necessariamente formalizadas no sentido de Tarski, as suas sentenças requerem um conceito análogo ao de verdade, porém, somente em relação à realidade intermediária que modela e não necessariamente em relação à realidade inicial.

A definição de verdade elaborada por Tarski, embora forneça condições para saber se cada sentença é verdadeira, ela não fornece informações se, de fato, ela o é. “Para saber se a sentença é, de fato, verdadeira, será preciso combinar a definição e a investigação empírica.”(HENKIN, 1975, p. 60). Para essa investigação empírica, pode-se fazer uso da verificação direta da sentença e de procedimentos indutivos e dedutivos, dentre outros. Euclides demonstrava suas proposições e a verdade daquilo que ele demonstrava era dada pela relação de correspondência ou concordância entre tais proposições e a realidade espacial. Até que surgiram as geometrias não-euclidianas, colocando em discussão a validade dessa relação ou o critério de verdade adotado. Já Hilbert não levou em conta o caráter de verdadeiro ou não daquilo que ele demonstrava, restringiu-se ao aspecto formal das proposições.

Em diversos sistemas formais, como mostrara Gödel, nem toda sentença verdadeira é demonstrável. Existem teorias axiomáticas nas quais há sentenças que podem ser identificadas como verdadeiras e, no entanto, não são demonstráveis. Isso diz respeito ao problema da completude das teorias quando apresentadas num formato axiomático dedutivo. Empregando uma linguagem adequada para descrever os objetos de certos domínios que se pretende explorar é impossível demonstrar todas as sentenças que são verdadeiras nesse domínio. “Daí segue que a noção de sentença demonstrável, seja qual for a teoria dedutiva formal selecionada para a linguagem, difere da noção de sentença verdadeira – pois a primeira noção pode ser expressa na própria linguagem e a segunda não.” (HENKIN, 1975, p. 64).

No caso de uma teoria dada por equações também podemos formular o problema da completude, porém, adaptando para esse caso o que se entende por ‘sentença demonstrável’ do caso das teorias axiomáticas. Talvez uma sentença demonstrável nesse caso seja uma sentença (ou equação) que se obtenha das primeiras por aplicação de diversos métodos de resolução. Tais métodos poderiam ser considerados como a lógica subjacente a essas equações. Nesse contexto, é possível que haja também um correspondente teorema da incompletude de Gödel: existem ‘equações verdadeiras’ acerca do fenômeno em estudo que não podem ser derivadas das equações originais da teoria.

Como podemos perceber, a questão da verdade é uma importante fonte de indagação filosófica acerca da ciência e da atividade científica, e não está livre de questionamentos. Quando se trata de atividades de modelagem matemática ela é tomada no sentido da chamada teoria correspondencial da verdade, segundo a qual, como já vimos, a verdade de uma sentença está em sua adequação com a realidade. Nas atividades de modelagem matemática na educação matemática, a menos que se esteja tratando de um estudo sobre filosofia ou fundamentos da ciência, trabalha-se com uma idéia intuitiva do conceito de verdade.

Capítulo 4

MODELAGEM MATEMÁTICA NO INTERIOR DA PRÓPRIA MATEMÁTICA

Partindo do pressuposto de que todas as ciências são ao mesmo tempo empíricas e teóricas, saberes em que a busca da verdade deve ser impulsionada por indicações empíricas aliadas à atividade criadora a procura de leis [...] para as quais a utilização da lógica e das ferramentas matemáticas é fundamental, é fácil percebermos o potencial da aplicação da modelagem nos campos científicos com métodos e finalidades comuns. (BASSANEZI, 2002, p.16)

Após entender o processo da modelagem tradicional do matemático aplicado, que parte de situações não matemáticas, fizemos uma releitura desse processo e a fundamentamos à luz de pressupostos filosófico-epistemológicos. Neste capítulo propomos uma adaptação, por analogia, dessa releitura do processo de modelagem matemática a situações nas quais a realidade inicial a ser modelada é um campo da própria matemática.

Nesse processo de adaptação por analogia o *status* da matemática enquanto realidade inicial pode ser fundamentado, veremos, no platonismo como uma forma de realismo. Quanto à matemática envolvida na construção da realidade intermediária, que conduzirá posteriormente a um modelo para essa realidade, ela pode ter um caráter estruturalista. A atitude característica nesse processo todo é de natureza empirista. Notemos que a matemática colocada dessa forma sugere-nos uma concepção pluralista da mesma: 1) como realidade inicial a matemática pode ser considerada objeto (platonismo); 2) como realidade intermediária ela pode ser apresentada por meio de estruturas, por exemplo, no sentido apontado por Bourbaki (estruturalismo); 3) como modelo ela tem um papel instrumental, no qual há uma forte intervenção da linguagem matemática e da lógica subjacente; 4) no pensamento e atitudes matemáticos envolvidos no processo de modelagem matemática pode comportar diversos elementos próprios de uma concepção empirista, no sentido que já expomos, onde, neste caso, a experiência matemática adquire um significado pleno.

Esses quatro momentos sugerem a referida visão pluralista de matemática, o que poderá promover um novo olhar sobre essa ciência à luz do processo de modelagem matemática, podendo sugerir propostas pedagógicas para o seu ensino.

4.1. A Matemática como Realidade Inicial no Processo de Modelagem Matemática

Podemos considerar que no processo de modelagem matemática, tanto de realidades não matemáticas como de realidades matemáticas, existe um mundo “real” exterior que se quer modelar através de um modelo matemático. Como já vimos, esse modelo pode ser dado por meio de uma teoria matemática que descreva e/ou explique os fenômenos desse mundo em estudo, teoria que pode estar dada por equações, como em muitos casos da modelagem de fenômenos físicos, ou por um sistema axiomático, como faremos neste capítulo para o caso de “fenômenos” matemáticos.

Sob uma visão platonista, a matemática existe fora de nós, o que podemos fazer é descobri-la, não inventá-la. As formas matemáticas têm uma existência independente da mente que as estuda. Porém, o conhecimento que podemos ter é apenas parcial. O próprio Platão é claro a respeito desse ponto no conhecido *Mito da Caverna*. Nesse mito sugere-nos que há uma realidade exterior “fora da caverna” mas que o acesso que o ser humano tem a ela é apenas através das sombras desse mundo que são projetadas nas paredes ao fundo da caverna. Isto é, o conhecimento que podemos ter desse mundo exterior só pode ser atingido por meio de representações, aqui constituídas pelas sombras.

Essa interpretação do *Mito da Caverna* de Platão pode fundamentar a adaptação que propomos do processo de modelagem matemática para o caso em que a realidade inicial seja a própria matemática nos seguintes termos: há uma realidade inicial matemática a ser compreendida e ela poderá sê-lo por meio da identificação de uma certa realidade intermediária (as sombras, as estruturas) que é aquela que será modelada posteriormente.

4.2. O Método Axiomático e as Estruturas

Vimos, no capítulo 3, como certos modelos (teorias) de situações não matemáticas podem ser formulados axiomaticamente como no caso da mecânica de Newton, cuja forma axiomática pode ser dada por um predicado de Suppes. Vimos também que o que está sendo axiomatizado são as hipóteses levantadas sobre as estruturas que constituíam uma realidade intermediária para esse caso.

Nos exemplos que apresentaremos neste capítulo o sistema de axiomas desempenhará o papel das equações que constituíam os modelos das situações não matemáticas. A seguir faremos algumas considerações sobre o método axiomático para falarmos do caráter instrumental da matemática quando tomada no processo de modelagem matemática.

Angel Ruiz (2006, p.11) coloca-nos que

em boa parte do ensino de matemática, a axiomática e os métodos dedutivos abstratos seguem sendo uma face persistente. Todavia não nos temos livrado daquela ênfase na unidade da matemática pela via das estruturas e das reduções axiomáticas. E, sobretudo, transmite-se aos estudantes o respeito e o medo a um edifício inexpugnável, absoluto e verdadeiro, impossível de questionar.

Para ele, o método axiomático está intimamente ligado aos processos rígidos dos métodos dedutivos próprios da lógica atual, e as estruturas são parte desse universo lógico. Diferentemente do que Ruiz sugere na citação acima nós re-interpretamos as estruturas, num sentido amplo, para compor a realidade intermediária.

O método axiomático pretende, por meio de uma linguagem adequada, fazer a descrição das estruturas que compõem a realidade intermediária. Essa descrição estará constituída por afirmações, nessa linguagem, que comporão o sistema de axiomas que resultará num modelo procurado. Mesmo no caso de algumas situações não matemáticas nas quais a descrição é feita mediante equações, elas também poderão ser interpretadas como os axiomas que, numa linguagem adequada, descrevem essas situações.

Todo sistema axiomático, inclusive nessa versão ampliada, colocada acima constitui uma espécie de formalização. Portanto, seria lícito adotar uma visão

formalista sobre a constituição propriamente dos modelos (ou teorias) no processo de modelagem. Porém, uma visão empirista parece-nos mais adequada nessa etapa, pois os axiomas que descrevem a realidade intermediária podem ser interpretados como conjecturas sobre o que acontece nessa realidade. Assim, o método axiomático usualmente associado ao formal, ao racional, pode também ser associado ao empírico.

No séc. III a.C., na obra *Elementos*, Euclides reuniu e expôs os conhecimentos de geometria plana e espacial, teoria de números e álgebra geométrica grega que se tinha até então fazendo uso do método axiomático, o que consistiu em definir conceitos elementares como ponto, reta e plano, para o caso da geometria, enunciar um pequeno número de afirmações não demonstradas, os axiomas e postulados, e, a partir deles, derivar os resultados (teoremas) da teoria em questão por meio de procedimentos dedutivos.

Euclides enunciou postulados e uma série de axiomas que foram tidos como verdades evidentes que podiam ser captadas por algum tipo de intuição. A diferença entre postulados e axiomas, naquela época, estava no fato de que aqueles diziam respeito a alguma área específica do conhecimento, nesse caso a geometria, e estes não se restringiam a uma área somente. Exemplos daqueles axiomas são: “o todo é maior do que as partes” e “se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais” (BARKER, 1976, p.33). E exemplos daqueles postulados são: “uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer” e “qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma reta” (BARKER, 1976, p.30).

“Uma teoria axiomática, segundo entendiam Aristóteles e Euclides, é um conjunto organizado de verdades a respeito de um determinado âmbito da realidade.” (MOSTERÍN, 1987, p. 115).

“Nos tempos antigos, na Idade Média, no período moderno, até o séc. XIX, os *Elementos* de Euclides foram não apenas o livro texto da Geometria, mas o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser” (BARKER, 1976, p.28).

Desde sua utilização por Euclides nos *Elementos*, o método axiomático foi utilizado praticamente até o final do século XIX “sem sofrer alterações, nem em seus princípios básicos (os quais, diga-se de passagem, não foram nem mesmo explicitamente formulados por um longo tempo), nem na abordagem geral com respeito ao assunto.” (TARSKI, 1991, p. 113).

O prestígio do qual o método axiomático goza na tradição científica do ocidente vem “desde a época em que Aristóteles identificou ciência perfeita com teoria axiomática.” (MOSTERÍN, 1987, p. 112).

Newton formulou, no séc. XVII, a sua mecânica nos moldes do método axiomático euclidiano, definindo seus conceitos elementares como ‘ponto material’, ‘força’, etc e tomando como axiomas as hoje conhecidas como Leis de Newton.

No séc. XIX o matemático Pasch por meio de um estudo acerca do método axiomático publicou a “primeira axiomatização logicamente satisfatória da geometria euclidiana.” (MOSTERÍN, 1989, p.112). Segundo ele,

para que a geometria se torne verdadeiramente numa ciência dedutiva, é necessário que a maneira como se extraem as conseqüências seja sempre independente do sentido dos conceitos geométricos, como o deve ser também das figuras; só se deve tomar em consideração as relações entre os conceitos geométricos formuladas pelas proposições (que servem de definições). Pode ser útil e conveniente pensar, durante a dedução, na significação dos conceitos geométricos utilizados, mas tal não é de modo algum necessário; de tal modo que é precisamente quando isso se torna necessário que se manifesta uma lacuna na dedução e (quando se não pode suprimir essa lacuna modificando o raciocínio) a insuficiência das proposições invocadas como meio de prova. (PASCH *apud* BLANCHÉ, 1987, p. 34-5)

O próprio processo de dedução requer, para sua legitimidade, da identificação das relações entre os conceitos e não do sentido destes, do seu significado na realidade inicial.

Peano fez uso pela primeira vez do método axiomático na aritmética identificando como conceitos elementares os de ‘número natural’ e ‘sucessor de um número’ e formulando o que hoje é conhecido como Axiomas de Peano. O sistema axiomático de Peano será re-interpretado na seção seguinte como um exemplo de modelo obtido no processo de modelagem no interior da própria matemática.

Mesmo tendo sido utilizado por Arquimedes e Newton, pode-se dizer que o método axiomático só atingiu uma certa maturidade a partir dos trabalhos de Hilbert, em finais do séc. XIX, e outros como Peano (na aritmética), Russell (na lógica) e Pasch (na geometria).

Algumas características do período de transformação pelo qual passou o método axiomático, desde a época de Euclides até chegar aos moldes que se conhece hoje, contribuem para a compreensão da abordagem desse método proposta neste trabalho.

Com o descobrimento das geometrias não-euclidianas no século XIX, que tinham entre seus axiomas formas de derrogar o quinto postulado de Euclides, muitos questionamentos surgiram acerca da veracidade ou não do que se podia afirmar, baseando-se na negação daquilo que se tinha como certo até então. E como coloca Mosterín (1987, p.116), “na segunda metade do século XIX havia diversos axiomas sobre as paralelas (correspondentes a teorias geométricas distintas) incompatíveis entre si. Todos estes axiomas não podiam ser verdadeiros ao mesmo tempo.” Diante disso, para muitos matemáticos na época, não pareciam razoáveis os motivos pelos quais se deveria considerar um axioma como verdadeiro e outro não. Justamente, esse aparecimento das geometrias não euclidianas gerou uma crise no pensamento geométrico tradicional, pois elas não seriam, em princípio a descrição de alguma realidade espacial.

O lógico Gottlob Frege foi um dos que não concordavam com o fato de existirem geometrias distintas da que se conhecia. Referindo-se ao fato comumente aceito de que a geometria de Euclides refletia, de certo modo, a realidade espacial, sendo, portanto “verdadeira”, Frege afirmou: “Nada pode servir a dois senhores. Não é possível servir à verdade e à falsidade. Se a geometria euclidiana é verdadeira, então a geometria não-euclidiana é falsa; e se a geometria não-euclidiana é verdadeira então a geometria euclidiana é falsa.” (FREGE *apud* MOSTERÍN, 1987, p. 117).

Analisado ao longo do tempo, o método axiomático apresenta uma natureza mutável. Teve conotações diferentes em períodos diferentes de seu desenvolvimento.

Como consequência de um período de revisão nos fundamentos da matemática, a geometria euclidiana também começou a ser revista quanto ao rigor de apresentação e quanto ao seu significado epistemológico. Entre os reformadores esteve Hilbert que apresentou uma reformulação da geometria euclidiana com base em uma nova visão de método axiomático no qual os axiomas são concebidos não como verdades de uma certa realidade espacial, senão como meros esquemas abstratos, que em si mesmos não são nem verdadeiros nem falsos, apenas pontos de partida.

A partir dos trabalhos de Hilbert, originou-se o que se conhece por método axiomático formal que, ao contrário do método axiomático material utilizado por Euclides, não descreve propriedades fundamentais de algum domínio da realidade.

Em sua obra, intitulada *Fundamentos da Geometria*, publicada em 1899, Hilbert apresenta inicialmente cinco categorias de axiomas que dizem respeito a certos elementos não definidos, como ponto, reta e plano, e não faz uso da evidência intuitiva. O que se poderia saber a respeito deles era aquilo que poderia ser constatado por meio dos axiomas. Os teoremas deduzidos a partir deles também não expressavam idéias falsas nem verdadeiras. A noção de verdadeiro ou falso só teria sentido quando tais axiomas fossem interpretados em algum âmbito da “realidade”. A geometria, então, nas mãos de Hilbert, não trata de objetos geométricos e sim das relações entre eles. Conforme teria dito Hilbert, as relações entre esses elementos não definidos, ditos entes primitivos, continuarão válidas independentemente de se tratar de pontos, retas e planos, ou mesas, cadeiras e copos de cerveja.

A idéia de Hilbert de priorizar as relações, e não os objetos, na geometria está na base, como mencionamos, do enfoque estruturalista na matemática, que foi desenvolvido posteriormente em forma mais abrangente pelo grupo Bourbaki.

Hilbert também promoveu com a sua referida obra uma separação entre os aspectos sintáticos de uma teoria axiomática e aqueles de natureza semântica. O aspecto sintático diz respeito aos símbolos adotados para designar os entes primitivos, as regras de inferência, as sentenças que serão consideradas coerentes, etc., em outras palavras, a uma certa linguagem e à lógica subjacente. Também fazem parte desse contexto os axiomas e a noção de prova que será adotada. Já o aspecto semântico diz respeito às possíveis interpretações desses elementos puramente simbólicos. Ou seja, a semântica é a parte relativa ao conteúdo de algum domínio de interpretação, é o momento em que uma estrutura formal e abstrata ganha sentido, sendo interpretada a partir de sua relação com um certo âmbito da “realidade”. A noção de ‘sentença verdadeira’ será então um conceito semântico, ao passo que a noção de ‘sentença demonstrável’ será um conceito sintático. Para saber se uma dada afirmação de uma teoria é verdadeira contrastamo-la com uma interpretação dessa teoria. É na multiplicidade de interpretações ou modelos possíveis que Hilbert vê a principal vantagem do novo método axiomático, salienta Mosterín (1987, p.121).

No nosso caso, essa diferença apontada por Hilbert entre o aspecto semântico e sintático de uma teoria reflete, de certa forma, a diferença que nós propomos entre realidade intermediária e modelo. A realidade intermediária estaria

mais do lado semântico da teoria, enquanto que o modelo matemático estaria mais do lado sintático.

A seguir apresentamos um exemplo que, incluindo a figura, foi extraído de Nagel e Newman (1973, p.23-4), e pode ajudar na compreensão desses dois aspectos.

Sejam K e L duas classes de objetos submetidos aos cinco axiomas a seguir.

A1 – Quaisquer dois objetos de K estão contidos em apenas um objeto de L.

A2 – Nenhum objeto de K está contido em mais do que dois objetos de L.

A3 – Os objetos de K não estão todos contidos em um único objeto de L.

A4 – Quaisquer dois objetos de L contêm apenas um objeto de K.

A5 – Nenhum objeto de L contém mais do que dois objetos de K.

O que temos até aqui são informações a respeito de entes dos quais não sabemos o significado. A partir delas podemos obter uma série de afirmações sobre os objetos de ambas as classes utilizando as regras da lógica clássica. E todas essas afirmações serão tidas como demonstráveis. Por exemplo, podemos provar que a classe K contém apenas três objetos. No entanto, até esse momento, esse sistema não diz respeito a qualquer domínio da realidade que conhecemos.

Agora, se considerarmos a classe K como sendo a coleção dos vértices de um triângulo e a classe L como sendo a coleção dos segmentos de reta que são os lados desse triângulo, podemos interpretar cada um dos axiomas dados inicialmente, conferindo-lhes significado semântico.

Assim, teríamos a seguinte interpretação desses axiomas.

A1 – Quaisquer dois vértices K estão contidos em apenas um lado L.

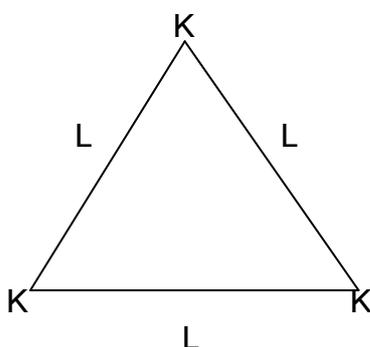
A2 – Nenhum vértice K está contido em mais do que dois lados L.

A3 – Os vértices K não estão todos contidos em um único lado L.

A4 – Quaisquer dois lados contêm apenas um vértice K.

A5 – Nenhum lado L contém mais do que dois vértices K.

INTERPRETAÇÃO NA QUAL OS AXIOMAS 1 A 5 SÃO VERDADEIROS.



A afirmação feita sobre a classe K (que tal classe possui apenas três elementos) pode ser reconhecida como verdadeira nessa interpretação (ou modelo no sentido da lógica matemática), pois a coleção formada pelos vértices de um triângulo possui, de fato, somente três elementos, o que está relacionado com o significado que atribuímos ao conceito de triângulo. E uma vez que ela pode ser deduzida dos axiomas, podemos garantir que será verdadeira em qualquer outra interpretação.

Frege, então, após analisar os *Fundamentos da Geometria*, escreveu a Hilbert, tecendo severas críticas a seu trabalho e argumentando que ele expressava-se com excessiva falta de precisão. Ele obteve resposta às suas primeiras observações sobre o método hilbertiano, mas após outras tentativas infrutíferas de discussão, Frege publica em 1903 um artigo no qual agrupou e ampliou suas críticas à referida obra de Hilbert.

Segundo Mosterín (1987), Hilbert, ao reformular a geometria euclidiana, conservou as mesmas palavras para designar idéias novas, o que, provavelmente, contribuiu para uma não compreensão imediata do novo método axiomático. Por exemplo, o que Frege entendia por axioma (um enunciado verdadeiro em relação a uma certa realidade, e que, portanto, não necessitava de demonstração) era algo diferente do significado que Hilbert dava a esse mesmo termo.

Frege havia analisado o método axiomático tradicional (pelo qual se entendia que aplicar o método a um determinado âmbito da realidade consistia em organizar nosso saber acerca desse âmbito em forma de teoria axiomática) e chegou a concluir que, para se alcançar um nível de maior rigor nas demonstrações, mais do que explicitar axiomas, como se havia feito até então, era necessário explicitar as

formas admissíveis de demonstração, as regras de inferência, ou seja, em última instância, explicitar a lógica subjacente. No entanto, para ele, segundo Mosterín (1987), a formalização envolvia somente uma precisão sintática e não uma mudança semântica. Ou seja, os enunciados feitos em linguagem natural eram substituídos por fórmulas de uma linguagem formal, mas estas continuavam expressando idéias que podiam ser caracterizadas como verdadeiras, ou seja, “carregadas de conteúdo significativo.” (MOSTERÍN, 1987, p. 116).

Para nós, o método axiomático envolvido no processo de elaboração de um modelo ou teoria na modelagem matemática está mais do lado da concepção de Frege desse método no seguinte sentido: os axiomas do modelo, enquanto descrições da realidade intermediária que está sendo modelada, são verdades acerca dessa realidade.

4.3. Exemplos de Modelagem Matemática no Interior da Matemática

A fim de realizarmos a adaptação do processo de modelagem matemática para situações nas quais a realidade inicial é a própria matemática começaremos por re-interpretar os conceitos fundamentais que nortearam nossa interpretação desse processo para, em seguida, apresentarmos alguns exemplos.

Para todos os exemplos deste capítulo tomaremos a matemática como uma realidade inicial, no sentido platonista, onde seus fenômenos e fatos matemáticos são considerados existentes, independentemente do conhecimento do sujeito.

Ou seja, mostraremos que é possível, por um procedimento de analogia, traduzir o processo de modelagem matemática descrito acima para uma situação puramente matemática, isto é, onde a realidade inicial é um campo da própria matemática, por exemplo, a aritmética, considerada esta como o universo dos números naturais com todas suas operações, relações e propriedades “ínatas”.

Para traduzir a metodologia usada pela Matemática Aplicada na obtenção de modelos de realidades não matemáticas para uma realidade matemática tomada como inicial, podemos supor que, nas novas situações, existe *a priori* um mundo “real” matemático que se pretende modelar através de um ‘modelo matemático’ dado por meio de uma teoria que descreva e/ou explique os “fenômenos” desse mundo

em estudo, em concordância com a visão platonista apontada anteriormente. Por outro lado, diferentemente das coleções de equações das situações não matemáticas, essa teoria, neste caso, geralmente será dada por um sistema axiomático, no qual os axiomas poderão ser considerados como conjecturas acerca da realidade intermediária correspondente. A idéia de 'realidade intermediária' nesse processo será, como no caso anterior, o recorte a ser modelado matematicamente. Esse recorte será constituído por estruturas.

Como um exemplo consideremos a axiomática de Peano da Aritmética, que re-interpretaremos à luz do processo de modelagem matemática. A realidade inicial nesse caso é o universo dos números naturais com todas suas propriedades, operações e relações. Como realidade intermediária desse mundo inicial consideremos o conjunto dos números naturais e a operação de sucessor. Essa escolha dá origem à seguinte estrutura matemática que é chamada de estrutura de Peano:

$$P = \langle N, s, 0 \rangle$$

Na qual N denota o conjunto dos números naturais $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, s é a função que a cada número natural $n \in N$ associa o sucessor se n , $s(n) = n + 1$ e 0 é o número natural zero que terá papel essencial na formulação da axiomática de Peano.

Na seqüência é construído o modelo ou teoria dessa realidade intermediária constituído por uma coleção de sentenças, expressas numa linguagem adequada, os chamados axiomas de Peano. Esses axiomas podem ser pensados como obtidos por observação de certos fenômenos que acontecem na realidade inicial tendo, portanto, um caráter conjectural. Os axiomas tais como formulados por Peano são os seguintes:

- A₁: Zero é um número natural, ou seja, $0 \in N$.
- A₂: Se n é um número natural então $s(n)$ também o é, ou seja, se $n \in N$ então $s(n) \in N$.
- A₃: Se dois números naturais têm o mesmo sucessor então esses números são iguais, ou seja, sendo $n \in N$ e $m \in N$, se $s(n) = s(m)$ então $n = m$.
- A₄: Não existe um número natural tal que zero seja o seu sucessor, ou seja, não existe $m \in N$ tal que $s(m) = 0$.

A_5 : Se $A \subseteq N$ tal que i) $0 \in A$ e ii) $(\forall n)(n \in A \rightarrow s(n) \in A)$ então $A = N$.

O axioma A_5 é chamado de *axioma da indução* e sua formulação tal como dada por Peano está expressa no que hoje se chama linguagem de segunda ordem. Isso é devido ao fato de o subconjunto A de N pode ser qualquer subconjunto. A partir da década de 1920, e decorrente das contribuições de Hilbert e Ackermann, já a linguagem de uma teoria matemática como a de Peano poderia ser restrita ao que se chama linguagem de primeira ordem. No caso desse axioma, basta restringir os subconjuntos A de N aos subconjuntos chamados *definíveis*, isto é, que podem ser definidos por uma expressão da mesma linguagem.

Os modelos axiomáticos de realidades matemáticas, assim como os modelos equacionais de realidades não matemáticas, devem ter suficiente generalidade de modo a descrever outras realidades não consideradas inicialmente. A seguinte citação de Henri Cartan, um dos fundadores do grupo Bourbaki, tomada de MASHAAL (2007) coloca-nos muito bem esse caráter de generalidade do modelo e do método axiomático, embora trate da elaboração de *demonstrações*, palavra que substituímos por *modelo*, na transcrição da citação que segue:

Um matemático que decide construir [um modelo] tem em mente certos objetos matemáticos bem definidos, que ele está estudando. Quando acredita ter obtido [o modelo] e começa a testar cuidadosamente todas as conclusões, percebe que apenas um número muito reduzido de propriedades específicas dos objetos considerados desempenharam algum papel [nesse modelo]. Ele descobre assim que pode utilizar [o mesmo modelo] para outros objetos, desde que estes possuam aquelas mesmas propriedades que ele empregou em sua [construção]. Aqui nós podemos ver a idéia simples subjacente ao método axiomático: em vez de declarar quais objetos devem ser examinados, basta estabelecer uma lista de propriedades (...) que serão utilizadas na investigação. Essas propriedades são então colocadas em destaque, condensadas nos axiomas; a partir daí, deixa de ser importante explicar quais os objetos estudados. Em vez disso, podem-se construir [os modelos] de maneira que permaneçam válidos para quaisquer objetos que satisfaçam os axiomas. É bastante notável que a aplicação sistemática de uma idéia assim tão simples tenha abalado tão completamente a matemática. (CARTAN *apud* MASHAAL, 2007, p. 92).

No caso do sistema de axiomas de Peano pode-se encontrar facilmente outras realidades aritméticas que ele igualmente descreve. Um outro exemplo de estrutura de Peano pode ser dado pela estrutura $\mathbf{P}' = \langle M, f, 1 \rangle$ na qual M é o conjunto dos números naturais ímpares, e f é uma função definida por $f(n) = n + 2$.

4.4. A Matemática como Ciência Empírica à Luz do Processo de Modelagem Matemática

As perspectivas mais freqüentes de modelagem matemática, que visam sua implementação no processo de ensino-aprendizagem da matemática, estão fortemente motivadas pela matemática aplicada e sua metodologia, como já vimos no capítulo 2. Porém, elas não explicitam a concepção de matemática que subjaz à matemática aplicada, menos ainda como essa concepção influencia a modelagem matemática nos processos de ensino-aprendizagem de matemática.

Podemos identificar alguns vestígios de concepções reveladas pelas discussões realizadas em estudos de modelagem na Educação Matemática tais como a matemática sendo tomada como existente independente de nosso conhecimento acerca dela (platonismo) e a matemática como construção racional a partir do empírico, que tem sua origem em Aristóteles.

Sobre a concepção de matemática no processo de modelagem, Anastácio (2007, p. 28) questiona como a matemática é vista nesse processo. “Como um instrumento que possibilita descrever a realidade ou, ao contrário, como algo que pertence à realidade e que deve ser descoberto?” Notemos que no primeiro caso a matemática é pensada como uma linguagem justamente para descrever a realidade, enquanto que no segundo há a pressuposição de que a matemática não seria apenas uma linguagem e sim algo mais estrutural da própria realidade.

À nossa abordagem da modelagem matemática não se revelou pertinente apoiar uma concepção de matemática em apenas um pressuposto filosófico, pensando a matemática de forma única em todas as etapas do processo de modelagem matemática.

Ao procurarmos uma fundamentação para o processo de modelagem matemática percebemos que seria necessária uma visão pluralista da matemática para que, em diferentes etapas desse processo, as práticas se justificassem. Essa visão é essencial neste estudo.

Na modelagem matemática temos a matemática como ferramenta, como linguagem, como prática social. Nós a vemos como ciência, melhor ainda, como uma ciência experimental, uma ciência empírica! Uma ciência pressupõe, além da

delimitação de seus objetos de estudo, de um método adequado à abordagem desses objetos, que inclua formas de validação dos conhecimentos construídos acerca dos mesmos.

Tomamos como exemplos de ciência as ciências naturais, fortemente fundamentadas no empírico. Nessa direção colocamos nossa proposta, conforme já mencionamos, de uma visão empirista da matemática, motivada pela possibilidade de se tomar a própria matemática como uma realidade a ser modelada, na qual ações como observação e experiência são reinterpretadas de modo a vislumbrar outras vertentes do trabalho com modelagem na educação matemática, não necessariamente atreladas à resolução de problemas “reais”. Neste contexto, então, a experiência matemática ganha significado. Para uma qualificação dos termos ‘observação’ e ‘experiência’ buscamos subsídios em Bachelard, conforme já colocamos, e também em Polya, dentre outros.

Para Polya, “a Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... *A Matemática em construção* aparece como uma ciência experimental, indutiva” (POLYA, 1966, p. vii, grifo nosso).

Segundo Bruter, e em concordância com Polya, “A matemática é uma ciência de representação e de observação, uma ciência de manipulação, uma ciência hipotético-dedutiva, uma ciência de provas” (BRUTER, 1998, p. 31). E acrescenta: “A ciência entra na sua fase experimental quando começa a agir sobre os seus objetos de estudo. Esta fase é de natureza dinâmica. Ela diz respeito a dois aspectos essenciais da ciência: a descoberta de fatos e a sua explicação” (BRUTER, 1998, p. 35). Inclusive o método axiomático já é visto sob uma ótica empirista por Blanché como mostra a citação seguinte:

Só nos livros é que uma axiomática começa pelos axiomas: no espírito do axiomático, os axiomas são o seu termo. Pressupõe a dedução material a que dá forma, e esta exigiu por seu turno um longo trabalho indutivo prévio, para coligir os materiais que organiza. O verdadeiro trabalho do axiomático consiste em descobrir os axiomas, partindo dessas bases: não em deduzir as conseqüências de princípios dados, mas antes, em encontrar, a partir de um dado conjunto de proposições, um sistema minimal de princípios dos quais possam ser deduzidas. À análise indutiva, que vai dos factos às leis, sucede a análise axiomática que, continuando a obra de sistematização dedutiva, vai das leis aos axiomas. Uma vez traduzidos estes em símbolos, com suas regras de funcionamento, o formalista poderá esquecer as significações intuitivas. Porém, estas não terão deixado de determinar o esquema da sua construção e só elas o tornam compreensível, garantindo a sua unidade: unidade orgânica, e não simples justaposição de axiomas. (BLANCHÉ, 1987, p. 103-4).

Então, o quê observa o matemático e com quê “instrumentos”? Para Bruter, “A observação incide em primeiro lugar em objetos particulares, denominados ‘exemplos’” (BRUTER, 1998, p. 33). Quando são difíceis as questões, os matemáticos usualmente procuram exemplos para obter as experiências matemáticas adequadas. E Polya acrescenta: “Primeiro observamos alguma semelhança”, no processo de observação procura-se alguma analogia (POLYA, 1966, p. 27).

Nesse caráter dinâmico de ciência experimental, observam-se, também, a forma, a organização, a configuração ou estrutura, a estabilidade, a regularidade, a simetria (situações limites), de fato, a observação já é um recorte da realidade.

Segundo Euler, o conhecimento que se apóia na observação é obtido por indução, isto é, um raciocínio que vai do particular ao geral (POLYA, 1966, p. 25).

A experiência matemática visa desvelar, através da manipulação de suas representações, a estrutura íntima do objeto e seu modo de geração, e lida com a descoberta. A tradução de um contexto a outro numa situação de analogia, pode ser considerada como uma manipulação dos objetos envolvidos para lhes atribuir propriedades e verificá-las experimentalmente, experimento que pode ser mental. De fato, a analogia tem um papel importante na formulação de hipóteses ou conjecturas.

A conjectura é um “conhecimento” encontrado por indução, isto é, sugerido pela observação (POLYA, 1966, p. 27). Portanto, uma conjectura é sujeito de crença e não de saber, isto é, uma conjectura é uma opinião(!), embora bem estruturada, e não ainda uma verdade. O processo de transformar uma crença num saber depende do paradigma de rigor e legitimidade. Na elaboração de uma conjectura podem haver rupturas doxásticas, assim como rupturas epistemológicas aparecem nas mudanças conceituais.

Depois da observação de vários exemplos com a identificação de suas analogias, e como um segundo passo, vem a generalização, processo que só é possível a partir do particular, mesmo sendo abstrato. Uma conjectura já é a expressão de uma generalização.

Uma vez feita a generalização e elaborada uma conjectura, é preciso testá-la com outros casos, com outros ‘exemplos’, os “quase-experimentos” na denominação de Euler (POLYA, 1966, p. 27). Os diversos quase-experimentos, dando certo,

apóiam a conjectura e sugerem procurar um padrão, ou norma (POLYA, 1966, p. 29). Esse padrão é parte essencial do modelo a ser construído, o qual é sempre uma aproximação, mesmo no caso de modelar um fenômeno matemático.

A validação do modelo matemático de uma situação física se dá com o experimento: só é aceito como válido aquilo que o experimento corrobora; no caso de uma situação matemática, com a coerência lógica: só é aceito como válido aquilo que pode ser demonstrado.

Dentro dessa visão empirista de matemática, com sua face experimental, na qual a intuição matemática é alimentada, e sua face lógica, na qual o conhecimento matemático é consolidado, colocamos a modelagem matemática.

A seguir analisamos um exemplo, que já foi exposto em (CIFUENTES e NEGRELLI, 2006; CIFUENTES e NEGRELLI, 2007), e que ilustra todos os pontos discutidos anteriormente. Este exemplo, que é uma elaboração nova, idealizada e desenvolvida por esta pesquisa, pretende rediscutir o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), pondo em relevo seu caráter multiplicativo e estabelecendo relações, por analogia, com a parte aditiva da aritmética.

Como realidade inicial temos o universo dos números naturais com todas suas propriedades, operações e relações, como no caso da aritmética de Peano.

O problema que propomos é o estudo e aprofundamento da situação de analogia dada pelas operações de adição e multiplicação no campo dos números naturais, especialmente em relação ao TFA e conceitos relacionados. Essa situação de analogia fornece dois casos particulares de uma situação mais geral, cuja essência pretende-se descobrir (CIFUENTES, 2005). Do ponto de vista do método científico, esse estudo mostrará que toda análise por analogia conduz naturalmente a um processo de generalização no qual o método axiomático terá o papel de elaborar o modelo teórico que explique as semelhanças e diferenças dos diversos casos particulares.

O processo seguido é uma das formas do método, enfatizado por Lakatos (1987), de análise-síntese em ação. Esse processo mostra também que toda generalização é precedida por uma situação de analogia. Aliás, para a Educação Matemática, não interessa tanto o resultado generalizado quanto o processo de generalização.

Como primeiro passo para a problematização temos a observação da realidade inicial o que nos conduzirá à construção de uma realidade intermediária.

Para a definição dessa realidade intermediária (ou recorte desse mundo inicial aritmético), consideramos dois fragmentos: o fragmento aditivo e o fragmento multiplicativo. Para o fragmento aditivo consideraremos como universo do discurso o conjunto dos números naturais \mathbf{N} , que suporemos começar em 0, munido da operação de adição, e para o fragmento multiplicativo o conjunto $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ munido da operação de multiplicação. Em ambos os conjuntos distinguiremos seu elemento inicial para estabelecer, em forma mais precisa, as analogias entre esses dois fragmentos.

Podemos definir, então, as duas seguintes estruturas que constituirão a nossa realidade intermediária:

$$\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{N}^*, \cdot, 1 \rangle$$

Essas estruturas mostrar-nos-ão, por observação, uma série de “fenômenos” sobre seu comportamento na realidade inicial. O nosso papel será deslindar quais são relevantes para estabelecer as analogias que nos permitam fazer uma generalização adequada. Elas também apresentam, desde sua formulação inicial, uma certa semelhança, uma certa analogia como nos mostram os seguintes “fatos”:

- a) A adição e a multiplicação são ambas associativas e comutativas.
- b) Ambas as operações tem um elemento neutro: no caso da adição é o ‘zero’ 0, satisfazendo $n + 0 = n$ para todo n ; e no caso da multiplicação é a ‘unidade’ 1, satisfazendo $n \cdot 1 = n$ para todo n .
- c) Ambas as operações satisfazem a seguinte *Lei de Cancelamento*:

$$n + k = m + k \Rightarrow n = m$$

e

$$n \cdot k = m \cdot k \Rightarrow n = m.$$

Essa última explica o porque da escolha de \mathbf{N}^* para o universo do discurso do fragmento multiplicativo: para não impor a exigência de ser $k \neq 0$, o que quebraria a analogia.

- d) Ambas as operações satisfazem, também, a seguinte lei que denominaremos de *Lei da Trivialidade*:

$$n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$$

e

$$n \cdot m = 1 \Rightarrow n = m = 1.$$

e) As correspondentes operações inversas, isto é, a subtração e a divisão, nem sempre estão definidas para dois números naturais quaisquer.

f) Uma outra analogia mais profunda e menos evidente é a seguinte. Há uma relação íntima entre a relação de ordem usual \leq de \mathbf{N} e a adição, a saber,

$$n \leq m \text{ se e somente se existe } k \in \mathbf{N} \text{ tal que } n + k = m.$$

Em forma análoga, entre a relação de divisibilidade $|$ e a multiplicação:

$$n | m \text{ se e somente se existe } k \in \mathbf{N}^* \text{ tal que } n \cdot k = m.$$

Ambas são relações de ordem, a primeira total e a segunda parcial. Repare-se (observe-se), também, que o elemento 0, neutro para a adição, é o menor número natural na relação \leq em \mathbf{N} , enquanto que o elemento 1, neutro para a multiplicação, é o menor na relação $|$ em \mathbf{N}^* ; mais uma analogia.

Alguns passos mais adiante, ainda, podem ser dados nessa analogia com o intuito de obtermos uma melhor compreensão, e até uma re-significação, dos fenômenos aritméticos. Por exemplo, o conceito de *número primo* na relação $|$, (isto é, no fragmento multiplicativo), formulado da seguinte maneira:

um número natural $a \neq 1$ (lembre que 1 é o “menor” na ordem $|$), é primo (multiplicativo) se não existe b com $1 | b$ e $b | a$, sendo $b \neq 1$ e $b \neq a$,

tem um correspondente na relação \leq , (isto é, no fragmento aditivo):

um número natural $a \neq 0$ (observe que 0 é o menor na ordem \leq) é ‘primo aditivo’ se não existe b com $0 \leq b$ e $b \leq a$, sendo $b \neq 0$ e $b \neq a$.

Nesse caso, necessariamente $a = 1$, isto é, o único número “primo” a respeito da adição é a unidade 1. Mais ainda, observamos com surpresa que é possível formular (embora a demonstração possa não ser trivial) o correspondente *teorema fundamental da aritmética para a adição* da seguinte maneira:

todo número $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ pode ser expresso de forma única como “soma de primos aditivos”, isto é, $n = 1 + 1 + \dots + 1$ (n vezes),

em completa analogia com o conhecido *teorema fundamental da aritmética (para a multiplicação)*, TFA:

todo número natural $n \in \mathbf{N}^ - \{1\}$ pode ser expresso de forma única como produto de primos (multiplicativos).*

A analogia mostra, mesmo mediante situações triviais, a profunda semelhança que existe entre as operações consideradas (aliás, os fragmentos considerados, o aditivo e o multiplicativo). Mais ainda, o exemplo apresentado põe em evidência a profundidade da simplicidade, quando situações aparentemente triviais ganham uma re-significação não trivial, como o caso de um número natural não nulo ser soma finita de 1's, fato que é verdadeiro na estrutura aditiva.

Como sugerimos anteriormente, a prova dessas situações "reais" aparentemente triviais poderia ser não trivial. Por exemplo, sabe-se que o TFA pode ser demonstrado usando toda a estrutura de anel dos números inteiros, o qual escapa ao contexto puramente multiplicativo no qual é formulado.

O processo de modelagem, no exemplo em discussão, tem seu ápice na elaboração de uma teoria axiomática para sistemas (estruturas) da forma $\langle A, \cdot, e \rangle$, que reúna todas as informações das estruturas $\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbf{N}^*, \cdot, 1 \rangle$. Usaremos a notação multiplicativa e, na falta de um nome melhor, as denominaremos por *estruturas aritméticas*.

Uma *estrutura aritmética* é, então, uma terna $\langle A, \cdot, e \rangle$, onde A é um conjunto não-vazio, ' \cdot ' é uma operação binária definida em A e ' e ' é um elemento distinguido de A satisfazendo os seguintes axiomas:

- a) ' \cdot ' é associativa e comutativa;
- b) ' e ' é elemento neutro para a operação ' \cdot ';
- c) Lei do Cancelamento: para todo $x, y, z \in A$,

$$x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y;$$

- d) Lei da Trivialidade: para todo $x, y \in A$,

$$x \cdot y = e \Rightarrow x = y = e.$$

Numa estrutura aritmética define-se, em forma natural, uma relação de ordem parcial da seguinte maneira:

$$x \leq y \Leftrightarrow \text{existe } z \in A \text{ tal que } x \cdot z = y.$$

Como no caso das estruturas $\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle$ e $\langle \mathbf{N}^*, \cdot, 1 \rangle$, prova-se que e é o elemento mínimo para a ordem \leq .

A seguir, num exercício de método axiomático, introduziremos alguns conceitos e enunciaremos algumas propriedades desses conceitos que, no modelo axiomático descrito acima, poderão ser demonstradas.

a) Um elemento $a \in A$ é dito um *átomo* de A se $a \neq e$ e cada vez que $e \leq x \leq a$ temos $x = e$ ou $x = a$.

b) Um elemento $a \in A$ é dito um *elemento irredutível* de A se $a \neq e$ e cada vez que $a = x \cdot y$ temos $a = x$ ou $a = y$.

O conceito de ‘átomo’ corresponde ao de ‘primo’, aditivo ou multiplicativo, nas estruturas iniciais. Portanto, na estrutura $\langle \mathbf{N}^*, \cdot, 1 \rangle$, os átomos são exatamente os números primos, e em $\langle \mathbf{N}, +, 0 \rangle$ o único átomo é $a = 1$, fatos que verificamos como verdadeiros nessas estruturas. Por outro lado, prova-se facilmente, no modelo axiomático dado, que a é um *elemento irredutível* de A se e somente se a é um *átomo* de A .

Visualizando outras realizações do modelo axiomático temos que o modelo axiomático procurado visa demonstrar, para qualquer estrutura aritmética, a seguinte versão do TFA:

todo elemento $m \in A - \{e\}$ pode ser expresso em forma única como produto de irredutíveis.

Uma forma de mostrar que os axiomas listados acima ainda são insuficientes para esse propósito é encontrar outras interpretações ou realizações, isto é, outras estruturas aritméticas, com as quais possamos experimentar e nas quais o TFA não seja válido. Elas terão a virtude de permitir visualizar as limitações do modelo (axiomático) introduzido, mais ainda, mostrarão como um certo enunciado pode ser verdadeiro na realidade intermediária e não “atingível” pelo modelo axiomático, como é o caso do TFA.

São exemplos de destaque as seguintes estruturas: para $a \in \mathbf{N}$, com $a \geq 2$, definimos $\mathbf{N}_a = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq a\} \cup \{0\}$, então, a estrutura $\langle \mathbf{N}_a, +, 0 \rangle$, onde $+$ é a operação de adição usual de \mathbf{N} , é uma estrutura aritmética. Porém, nessa estrutura,

a ordem induzida pela operação não é a usual de \mathbf{N} (por exemplo, não é verdade que $a \leq a + 1$, pois $1 \notin \mathbf{N}_a$), o que acarreta o fato dessa ordem não ser total. Verifica-se facilmente que nessas estruturas são átomos, ou seja, elementos irredutíveis, os elementos $a, a + 1, \dots, a + (a - 1)$.

Essa situação experimental reflete-se na nossa análise do TFA, pois podemos mostrar que em \mathbf{N}_a , embora possamos decompor todo $m \neq 0$ como soma de irredutíveis, tal decomposição não é única, como mostra o seguinte “exemplo”:

$$a(a + 1) = a + \dots + a \text{ (} a+1 \text{ vezes)} = (a + 1) + \dots + (a + 1) \text{ (} a \text{ vezes)},$$

sendo a e $a + 1$ irredutíveis como mencionado acima.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos neste estudo, por meio de uma abordagem interna do processo de modelagem matemática, ou seja, de uma abordagem de sua natureza, seus procedimentos, pressupostos e fundamentos, uma caracterização do componente realidade presente nesse processo. Na busca dessa caracterização realizamos uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem que nos levou a uma nova forma de ver a própria matemática envolvida nesse processo.

Ao situarmos o componente realidade numa descrição do processo de modelagem matemática como ele comumente é visto na educação matemática pudemos, explorando a natureza interdisciplinar desse processo e da própria educação matemática, perceber seu potencial para o estudo de questões referentes às diferentes formas de concepção da própria matemática encontradas em diversas etapas de seu desenvolvimento histórico.

Ao caracterizarmos esse componente realidade no processo de modelagem matemática a partir de uma análise epistemológica do mesmo mostramos que sua construção é feita com base em pressupostos geralmente não explicitados mas que estão intimamente ligados ao aspecto estrutural que a própria matemática possui em seu estado atual de desenvolvimento. Esse aspecto revela-se nas atitudes simplificadoras e generalizantes típicas do modelador e leva-nos a ressaltar a forma de pensar matematicamente acerca das situações que buscamos estudar, acerca das realidades que pretendemos modelar. Essa forma está na base de uma atitude interdisciplinar, importante para a prática científica e para o ensino e a aprendizagem de matemática, de modo especial.

Ao fazermos uma releitura do processo de modelagem matemática à luz da análise epistemológica realizada mostramos que esse processo pode ser decomposto em etapas de modo que a construção de uma realidade intermediária, situada entre a realidade focada inicialmente e o modelo matemático que se busca elaborar, é uma etapa fundamental. No entanto, além dessas três etapas

destacadas, a realidade inicial, a realidade intermediária e o modelo matemático, há outras que não foram exploradas neste estudo, mas que figuram entre nossos interesses para estudos futuros. Entre elas a elaboração propriamente dita do modelo matemático, na qual há a forte intervenção da linguagem utilizada. A avaliação do modelo e sua confrontação com a realidade inicial e com a intermediária. Abordamos algo acerca dessa confrontação neste estudo, mas esse ponto demanda uma pesquisa mais aprofundada.

Ao propormos uma adaptação por analogia do processo de modelagem matemática para o caso em que a realidade a ser modelada é um recorte da própria matemática apresentamos a modelagem matemática como uma forma de estudar a própria matemática e isso constitui uma contribuição original deste estudo. Essa nova forma de ver a matemática, podendo ser submetida a um processo de modelagem no sentido que propomos, traz, por exemplo, outras possibilidades de abordar o próprio processo de modelagem matemática em cursos que visem a formação de professores de matemática, além daquela que coloca esse processo, e a própria matemática envolvida nele, como uma ferramenta para o estudo de situações e resolução de problemas não matemáticos.

A questão de se substituir a linguagem natural por uma linguagem matemática visando a elaboração de um modelo, o que poderíamos denominar transições de linguagem na modelagem matemática, não é algo trivial e constitui outra questão aberta ressaltada por este estudo.

Na modelagem matemática, por exemplo, no caso da elaboração de um modelo (teoria) de um fenômeno físico, usualmente são formuladas equações de diversas complexidades para a descrição desse fenômeno. Essas equações podem ser consideradas sentenças formuladas na linguagem da teoria em questão e, para elas, também faz sentido perguntar sobre sua verdade e até sobre alguma “lógica” subjacente (num sentido mais amplo que aquele das linguagens formais).

No caso de uma teoria dada por equações também podemos formular o problema da completude, porém, adaptando para esse caso o que se entende por ‘sentença demonstrável’ do caso das teorias axiomáticas. Talvez uma sentença demonstrável nesse caso seja uma sentença (ou equação) que se obtenha das primeiras por aplicação de diversos métodos de resolução. Tais métodos poderiam ser considerados como a lógica subjacente a essas equações. Nesse contexto, é possível que haja também um correspondente teorema da incompletude de Gödel:

existem 'equações verdadeiras' acerca do fenômeno em estudo que não podem ser derivadas das equações originais da teoria. Outra questão aberta para investigação.

Se atentarmos para o significado de verdade segundo os padrões científicos, por exemplo, a concepção de verdade como correspondência, nem sempre é acerca dela que se está falando nos casos mencionados. Essa diferenciação pode parecer desnecessária nos níveis de ensino fundamental e médio, mas é relevante quando se busca uma melhor compreensão dos métodos utilizados na estruturação de teorias matemáticas e científicas em geral. E essa compreensão, no caso do processo de modelagem matemática, pode ser importante também para a formação de um professor de matemática.

A Educação Matemática como área interdisciplinar estará promovendo aquela fusão de áreas do conhecimento que ressaltamos no capítulo 1 ao abrir-se para a contemplação de novas formas de abordagem para propostas pedagógicas relativamente conhecidas e adotadas como é a modelagem matemática. De modo especial, a visão pluralista de matemática que propomos poderá promover um novo olhar sobre essa ciência à luz do processo de modelagem matemática, podendo sugerir propostas pedagógicas para o seu ensino.

Enfim, esse estudo pode ser considerado uma espécie de filosofia da prática matemática inerente ao processo de modelagem matemática, na medida em que buscamos estabelecer alguns elementos teóricos que possibilitem uma interpretação da modelagem matemática como atividade condutora à aquisição daquele pensamento matemático, propício a uma atitude interdisciplinar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

ANASTÁCIO, M. Q. A. *Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática*. (Dissertação). Mestrado em Educação Matemática UNESP – Rio Claro 1990.

_____. Concepções de realidade e de matemática no processo de modelagem matemática: alguns apontamentos. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007. *Anais...* Ouro Preto: UFOP, 2007. p. 24-34. 1 CD-ROM.

ANASTÁCIO M. Q. A. , DOVAL, J. P. M. Modelagem matemática e realidade: um tema em debate. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2005. *Anais...* Salvador: UEFS, 2005. 1 CD-ROM.

ARAÚJO, J. de L. *Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BACHELARD, G. *O novo espírito científico*. 3.ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000.

_____. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARKER, S. E. *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro : Zahar, 1989.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? *Educação matemática em revista*, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abr, 2001.

_____. Modelagem na Perspectiva do Pensamento. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003. *Anais...* Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1 CD-ROM.

_____. Modelagem na Matemática: uma mudança de base conceitual. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007. *Anais...* Ouro Preto: UFOP, 2007. p. 35-58. 1 CD-ROM.

BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

_____. Princípios de metamodelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2. 2003. *Anais...* Santos, 2003, 1 CD ROM.

BLANCHÉ, R. *A axiomática*. 2. ed. Trad. por Maria do Carmo Cary. Lisboa: Editorial Presença, 1987.

BLUM, W.; NISS, M. Mathematical Problem Solved, Modelling,..., Cap. 1 *in: Applications and applied Problem Resolved* (Blum-Niss-Huntley), Ellis Horwood Ed., Chinchester, 1989.

BLUM, W. ; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies In mathematics*, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, feb. 1991.

BREUCKMAN, H; NEGRELLI, L. G. Desenvolvimento curricular no ensino médio com base na resolução de problemas a partir de pressupostos vygotskyanos. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 3., *Anais...* Porto Alegre, 2000. 1 CD ROM.

BRUTER, C-P. *Compreender as Matemáticas: As dez noções fundamentais*. Lisboa: Instituto PIAGET, 1998.

BUNGE, M. Teoria e realidade. Trad. Gita Guinsburg. São Paulo: Perspectiva, 1974.

CIFUENTES, J. C. . O Método de Analogia e a Pesquisa Científico-didática na Formação Inicial de Professores de Matemática. In: V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática - CIBEM, 2005, Porto. *Anais...*, 2005. v. 1. p. 1-13.

CIFUENTES, J. C. ; NEGRELLI, L. G. ; ESTEPHAN, V. M. . Apreciar la Matemática vs. Comprender la Matemática: Un Debate Didáctico. In: REUNIÓN DE DIDÁCTICA MATEMÁTICA DEL CONO SUR, 5., 2000. *Anales... Santiago*, 2000. v. 1. p. 1-18.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. Perspectivas Epistemológicas e Metafísicas na Modelagem Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. 2006. *Anais... Águas de Lindóia*, out. 2006. CD ROM.

_____. Modelagem matemática e método axiomático. In: BARBOSA, J.C; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. *Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM, 2007. p. 215-232.

DA COSTA, N. C. A . *Introdução aos fundamentos da matemática*. 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1992.

_____. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. 4. ed. São Paulo: Summus, 1986.

_____. *Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático*. 1999. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm>. Acesso em 07/2004.

DISCUSSION DOCUMENT – ICMI, (2002). *Applications and Modeling in Mathematics Education Study 14*. ICMI, 2002.

DUTRA, L. H. de A. *Introdução à teoria da ciência*. 2. ed. Florianópolis, Ed. Da UFSC, 2003.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FAZENDA, I. C. A. *Práticas interdisciplinares na escola*. São Paulo: Papyrus, 2001.

FERREIRA Jr. , W. C. O sexto problema de Hilbert: quando o fim se tornou método. *In: Revista Brasileira de História da Matemática*. v. 3. n. 5. abr/2003 -set/2003, p. 63-72.

FOUREZ, G. *A construção das ciências: introdução à filosofia e à ética das ciências*. São Paulo: Editora UNESP, 1995.

HENKIN, L. Verdade e demonstrabilidade. *In: MORGENBESSER, Sidney (Org.) Filosofia da Ciência*. 2. Ed. Trad. Por Leonidas Hegenberg e Octany Silveira da Mota. São Paulo : Cultrix, 1975.

JAPIASSU, H. *Questões epistemológicas*. Rio de Janeiro: Imago, 1981.

KRAUSE, D. *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo: EPU, 2002.

LACERDA ARAÚJO, I. *Introdução à filosofia da ciência*. 3. ed. Curitiba. Ed. da UFPR, 2003.

LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. 2. Ed. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

LEIS, H. R. *Sobre o conceito de interdisciplinaridade*. In: *Cadernos de pesquisa interdisciplinar em ciências humanas*. Florianópolis: UFSC, 2005.

MALHEIROS, A. P. dos S. *A produção matemática dos alunos em ambiente de modelagem*. 2004. 180 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

MASHAAL, M. Quem é Bourbaki? In: *Gênios da ciência: a vanguarda matemática e os limites da razão*. Scientific American Brasil. São Paulo: Ediouro, 2007. p. 67-98

MIGUEL, A. et al. *A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização*. In: REVISTA BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO. ANPED. Rio de Janeiro: Autores Associados, n. 27, 2004.

MOSTERÍN, J. *Conceptos y teorías en ciencia*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

MULLER, M. C. *Modelos matemáticos no ensino da matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986.

NAGEL E. Y.; NEWMAM J. *A prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva, 1974.

NEGRELLI, L. G. *A consideração de procedimentos dedutivos e indutivos na formação de professores de matemática*. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR, 2000.

_____. De que realidade trata a modelagem matemática no ensino? *I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*. Londrina, out., 2004. CD-ROM.

_____. Algumas questões suscitadas por uma análise do documento de discussão do grupo de estudos da ICMI sobre Aplicações e Modelagem na Educação Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4. 2005. *Anais...* Salvador, 2005, 1 CD-ROM.

_____. Modelación Matemática y Ontología. In: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 19, Año 2006, p. 317 a 323. Idioma: Español. Digitalizado en México. Editor: Gustavo Martínez Sierra – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Versión digital (volumen completo)

_____. Uma concepção de matemática subjacente à modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2007. *Anais...* Curitiba, 2000, 1 CD-ROM.

OMNÉS, R. *Filosofia da ciência contemporânea*. Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora UNESP, 1996.

POINCARÉ, J. H. *Ciencia y método*. 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina S. A, 1946.

POLYA, G. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Trad. por José Luis Abellan. Madrid: Editorial Tecnos, 1966.

POPPER, K. *A lógica da pesquisa científica*. São Paulo, CULTRIX, 1972..

RUIZ, A. Educación matemática como una nueva disciplina. In: *Atos de Pesquisa em Educação*. FURB. V 1, n.3, 2006.

SILVA, D. K. da. Ações de modelagem para a formação inicial de professores de matemática. In: BARBOSA, J.C; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. *Modelagem*

matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 215-232.

SILVA, J. J. *Filosofias da matemática.* São Paulo: Editora da UNESP, 2007.

SILVEIRA, E. *Modelagem matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações.* (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR, 2007.

TARSKI, A. Verdade e demonstração. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, série 3, p. 91-123, jan./jul. 1991.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. Sistema de Bibliotecas. *Normas para apresentação de documentos científicos.* Curitiba: Ed. da UFPR, 2007. 9 v.

Bibliografia Complementar (não citada)

BADIOU, A. *Sobre o conceito de modelo.* Lisboa: Editorial Estampa, 1972.

BARBOSA, J. C. *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BOURBAKI, N. A arquitetura das matemáticas. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, n.4, 1957, p. 1-17

BRUYNE, P. de; HERMAN, J.; SCHOUTHEETE, M. de. *Dinâmica da pesquisa em ciências sociais: os pólos da prática metodológica.* Trad. Ruth Joffily. Rio de Janeiro: Francisco. Alves, 1991.

BUENO, O. *O empirismo construtivo: uma reformulação e defesa.* Campinas: Editora da UNICAMP, 1999.

CASTI, J. L. *Mundos virtuais: como a simulação está mudando as fronteiras da ciência.* Trad. por Paulo Cesar Castanheira. Rio de Janeiro: Revan, 1998.

COURANT, R.; ROBBINS, H., *O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CROSBY, A. W. *A mensuração da realidade: a quantificação e a sociedade ocidental, 1250-1600.* Trad. Vera Ribeiro. São Paulo: Ed. UNESP, 1999.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática.* Trad. por Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa : Gradiva, 1995.

DUTRA, L. H. *Oposições filosóficas: a epistemologia e suas polêmicas.* Florianópolis, Ed. Da UFSC, 2005.

FREUDENTHAL, H. *The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1960.

LORENZO, J. de. Del Hacer Matemático, su Historia y su Plasmación Educativa. *La Gazeta de la RSME*. Espanha, 2005, vol. 8-2, pp. 397-417.

MACHADO, N. J. *Matemática e realidade*. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MULLER, M. C. *Modelos matemáticos no ensino da matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1986.

OMNÉS, R. *Filosofia da ciência contemporânea*. Trad. Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora UNESP, 1996.

POINCARÉ. *A ciência e a hipótese*. 2. ed. Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988.

_____. *O valor da ciência*. Trad. por Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

SANT'ANNA, A. S. *O que é um axioma?* Barueri: Manole, 2003.

SKOVSMOSE, O. *Mathematical agency and social theorising. aalborg: Center for forskning i matematiklaering*, 1999. 46 p.

SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papyrus, 2001.

VAN FRAASSEN, B. C. *A imagem científica*. Trad Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP: Discurso Editorial, 2007.

WILMER, C. B. *Modelos na aprendizagem da matemática*. Dissertação (Mestrado em Ciências da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1976. 118p.