

**LEONARDO GABRIEL MOLINA PINO**

**AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO  
BIDIMENSIONAL PARA A COMPATIBILIZAÇÃO DE BASES  
CARTOGRÁFICAS DE ESCALA 1:10.000 COM SIRGAS2000**

Dissertação apresentada como requisito parcial  
à obtenção do grau de Mestre em Ciências  
Geodésicas, Curso de Pós-Graduação em  
Ciências Geodésicas, Setor de Ciências da  
Terra, Universidade Federal do Paraná.

Orientador:  
Prof. Dr. Henrique Firkowski

**CURITIBA  
2007**

**“AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO  
BIDIMENSIONAL PARA A COMPATIBILIZAÇÃO DE BASES  
CARTOGRÁFICAS DE ESCALA 1:10.000 COM SIRGAS2000”**

**POR**

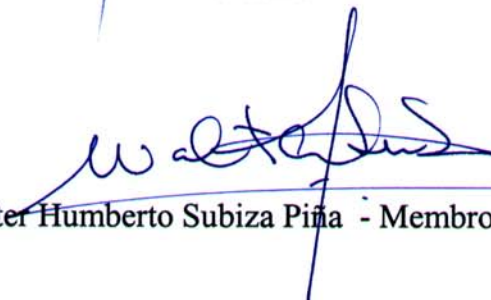
**LEONARDO GABRIEL MOLINA PINO**

Dissertação nº 202 aprovada como requisito parcial do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Curitiba, 26 de fevereiro de 2007.



Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas (UFPR)  
Presidente



Dr. Walter Humberto Subiza Pina - Membro (IBGE)



Prof.ª Dr.ª Regiane Dalazoana - Membro (UFPR)



Prof.ª Dr.ª Claudia Robbi Sluter - Membro (UFPR)

## DEDICATÓRIA

“Os céus e a terra passarão, mas as  
minhas palavras jamais passarão”

Jesus (Mateus 24.35)

Dedico este trabalho à minha  
esposa Lily e aos meus filhos  
Israel e Samuel.

## AGRADECIMENTOS

A Jesus Cristo pela salvação, transformação e mudança de referencial que fez na minha vida, e pela Sua presença em todo este caminhar.

À minha esposa Lily pelo amor, paciência, ânimo, e constantes orações.

Aos meus filhos Israel e Samuel pela companhia, as brincadeiras e orações.

Aos meus irmãos na fé da Quarta Igreja Batista de San Bernardo - Chile, pelas suas palavras de ânimo e permanentes orações; e aos irmãos da Primeira Igreja Batista de Curitiba - Brasil, pelo recebimento, acolhida e amor para com toda a minha família, em forma particular agradeço à família Volcov e ao grupo da célula 25.

À Universidade Tecnológica Metropolitana – UTEM pela comissão de estudos outorgada.

Aos meus colegas e a secretaria Doris do Departamento de Cartografia da UTEM.

Aos colegas Mireya González, Pablo Azocar, Miguel Valladares, René Viancos e Juan Carlos Baez, pela amizade, apoio e pelas oportunas discussões “cartográficas”.

Ao colega e amigo Mestre René Zepeda Godoy, pelo encorajamento que motivou meus estudos de pós-graduação e pela constante cobrança.

À Universidade Federal do Paraná - Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas (CPGCG).

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pela bolsa de estudos outorgada.

Ao professor Dr. Henrique Firkowski pela orientação e valiosa ajuda.

Ao professor Dr. Leonardo Castro de Oliveira pelas valiosas críticas no seminário de qualificação.

Aos professores Dr. Silvio Correia de Freitas, Dra. Claudia Robbi Sluter e Dra. Regiane Dalazoana, e ao Dr. Walter Subiza Piña, membros da banca examinadora na defesa de dissertação, pelas valiosas críticas e sugestões.

A todos os professores, colegas e à secretaria Mônica do CPGCG.

... Sou devedor de todos!

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	vii
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>RESUMO</b> .....	x
<b>RESUMEN</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xii
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	1
1.2 SITUAÇÃO DO PROBLEMA.....	4
1.3 ENFOQUE DE PESQUISA.....	7
1.4 JUSTIFICATIVA.....	9
1.5 OBJETIVOS.....	10
1.5.1 Objetivo geral.....	10
1.5.2 Objetivos específicos.....	10
<b>2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> .....	11
2.1 SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA.....	11
2.2 SISTEMA GEODÉSICO CARTESIANO.....	13
2.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA.....	15
2.4 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS.....	18
2.4.1 Representação de superfícies por meio de curvas paramétricas.....	19
2.4.1.1 Distorção de escala.....	24
2.4.1.2 Distorção de escala sobre as curvas paramétricas.....	25
2.4.2 Projeção Transversa de Mercator.....	26
2.4.3 Sistema de projeção <i>Universal Transversa Mercator</i> .....	31
<b>3 METODOLOGIA</b> .....	34
3.1 AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA MUDANÇA DE REFERENCIAL GEODÉSICO NA GEOMETRIA DAS BASES CARTOGRÁFICAS.....	34
3.2 AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO BIDIMENSIONAL.....	45
3.2.1 Processo de ajustamento pelo MMQ na estimação de parâmetros de transformação.....	48
3.2.1.1 Modelo de Transformação Afim 2-D.....	50
3.2.1.2 Modelo de Transformação de Similaridade 2-D.....	50
3.2.1.3 Modelo de Transformação Projetiva 2-D.....	51
3.2.1.4 Modelo de Transformação Polinomial 2-D (segundo grau).....	53
3.2.1.5 Modelo Transversa de Mercator Modificada (TMM).....	53
<b>4 EXPERIMENTOS</b> .....	57
4.1 TESTES E ANÁLISES PARA AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA MUDANÇA DE REFERENCIAL GEODÉSICO NA GEOMETRIA DAS BASES CARTOGRÁFICAS.....	57
4.1.1 Teste 1 - Translação de 200m no eixo X do SCG.....	57

4.1.2 Teste 2 - Translação de 200m no eixo Y do SCG.....	60
4.1.3 Teste 3 - Translação de 200m no eixo Z do SCG.....	62
4.1.4 Teste 4 - Rotação de -1" no eixo X do SCG.....	65
4.1.5 Teste 5 - Rotação de 1" no eixo Y do SCG.....	67
4.1.6 Teste 6 - Rotação de -1" no eixo Z do SCG.....	68
4.1.7 Teste 7 - Diferencia relativa de escala de 1ppm na TS-3D.....	71
4.1.8 Teste 8 - Mudança de elipsóide: Hayford a GRS80.....	71
4.1.9 Teste 9 - Transformação com todos os parâmetros distintos a zero na TS-3D e mudança de elipsóide: de Hayford a GRS80.....	72
4.1.10 Valores mínimos e máximos obtidos nos testes 1 ao 9.....	75
4.2 TESTES E ANÁLISES PARA AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO BIDIMENSIONAIS.....	78
4.2.1 Ajustamento a partir das observações no quadrante do fuso-0.....	79
4.2.2 Ajustamento a partir das observações na região de teste.....	85
5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	87
5.1 CONCLUSÕES.....	87
5.2 RECOMENDAÇÕES.....	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	90

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - NÚMERO DE CARTAS DO MAPEAMENTO SISTEMÁTICO VINCULADAS AO SGB CÓRREGO ALEGRE E SAD69.....	3
TABELA 2 - PARÂMETROS E ELIPSÓIDES USADOS NOS TESTES E MAGNITUDES AVALIADAS.....	38
TABELA 3 - PARÂMETROS DOS ELIPSÓIDES UTILIZADOS NOS SGR's OFICIAIS NO BRASIL.....	38
TABELA 4 - MAGNITUDES EXTREMAS DE DESLOCAMENTO APARENTE DOS PONTOS PARA CADA TESTE.....	76
TABELA 5 - MAGNITUDES EXTREMAS PARA CADA TESTE DA VARIAÇÃO DA DISTORÇÃO DE ESCALA, CONVERGÊNCIA MERIDIANA E DO ÂNGULO ORTOGONAL MENSURADO NO PLANO DE PROJEÇÃO.....	77
TABELA 6 - PARÂMETROS E DESVIO-PADRÃO DOS PARÂMETROS PARA CADA MODELO DE TRANSFORMAÇÃO APLICADO NO QUADRANTE DO FUSO-0.....	79
TABELA 7 - PARÂMETROS E DESVIO-PADRÃO DOS PARÂMETROS PARA CADA MODELO DE TRANSFORMAÇÃO APLICADO NA REGIÃO DE TESTE.....	85
TABELA 8 - RESÍDUOS MÁXIMOS E MÍNIMOS PARA OS MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO APLICADOS NA REGIÃO DE TESTE.....	86

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - VETOR DE DESLOCAMENTO DAS COORDENADAS HORIZONTAIS REFERIDAS AO SAD69/96 EM RELAÇÃO A SAD69 PRIMEIRA REALIZAÇÃO.....	6
FIGURA 2 - SISTEMA CARTESIANO GEODÉSICO.....	14
FIGURA 3 - SUPERFÍCIE REPRESENTADA POR AS CURVAS PARAMÉTRICAS $u$ E $v$ .....	20
FIGURA 4 - SUPERFÍCIE REPRESENTADA POR AS CURVAS PARAMÉTRICAS $U$ E $V$ .....	21
FIGURA 5 - COMPRIMENTO INFINITESIMAL $ds$ NA SUPERFÍCIE REPRESENTADA PELAS CURVAS PARAMÉTRICAS $u$ E $v$ .....	22
FIGURA 6 - CONVERGÊNCIA MERIDIANA $C$ .....	30
FIGURA 7 - DISTORÇÃO DE ESCALA NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO UTM.....	32
FIGURA 8 - CONVERGÊNCIA MERIDIANA NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO UTM.....	33
FIGURA 9 - SEQÜÊNCIA DE TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS REFERIDAS A DISTINTOS SGR.....	36
FIGURA 10 - QUADRANTE SUDESTE DE UM FUSO UTM.....	40
FIGURA 11 - TRANSLAÇÃO NO EIXO $Y$ DO SCG ( $XYZ$ ) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ ).....	41
FIGURA 12 - TRANSLAÇÃO NO EIXO $X$ DO SGC ( $X, Y, Z$ ) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ ).....	42
FIGURA 13 - ROTAÇÃO DO EIXO $X$ ( $\omega_x$ ) DO SGC ( $X, Y, Z$ ) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ ).....	43
FIGURA 14 - ROTAÇÃO DO EIXO $Y$ ( $\omega_y$ ) DO SGC ( $X, Y, Z$ ) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ ).....	43
FIGURA 15 - RELACIONAMENTO DE SUPERFÍCIES NO PROCESSO DE AJUSTAMENTO.....	47
FIGURA 16 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA O $\Delta X=200m$ NA TS-3D.....	58
FIGURA 17 - VISTA ORTOGONAL AO PLANO $XZ$ E AO PLANO $XY$ DO SCG PARA UMA TRANSLAÇÃO $\Delta X$ NA TS- 3D.....	59
FIGURA 18 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA $\Delta Y=200m$ NA TS-3D.....	61
FIGURA 19 - SITUAÇÃO DE UM PONTO $p$ PARA UMA TRANSLAÇÃO $\Delta Y$ NA TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE 3-D.....	62
FIGURA 20 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA $\Delta Z =200m$ NA TS-3D.....	63
FIGURA 21 - SITUAÇÃO DE UM PONTO $p$ PARA UMA TRANSLAÇÃO $\Delta Z$ NA TS-3D.....	64
FIGURA 22 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA $\omega_x=-1''$ NA TS-3D.....	65
FIGURA 23 - SITUAÇÃO DE UM PONTO $p$ NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA UMA ROTAÇÃO DE $-\omega_x$ NA TS-3D.....	66
FIGURA 24 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA $\omega_y=1''$ NA TS-3D.....	67
FIGURA 25 - SITUAÇÃO DE UM PONTO $p$ NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA UMA ROTAÇÃO $\omega_y$ NA TS-3D.....	68



FIGURA 26 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA $\omega_z = -1''$ NA TS-3D.....	69
FIGURA 27 - SITUAÇÃO DO PONTO $p$ PARA UMA ROTAÇÃO $-\omega_z$ NA TS-3D.....	70
FIGURA 28 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80.....	72
FIGURA 29 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA TS-3D COM PARAMETROS DISTINTOS DE ZERO E MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80.....	73
FIGURA 30 - VARIAÇÃO ANGULAR ENTRE DIREÇÕES ORTOGONAIS PARA TS-3D COM PARAMETROS DISTINTOS DE ZERO E MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80.....	74
FIGURA 31 - PONTOS OBSERVADOS NA REGIÃO DE TESTE.....	78
FIGURA 32 - RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO AFIM 2-D.....	80
FIGURA 33 - RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE 2-D.....	81
FIGURA 34 - RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA 2-D.....	82
FIGURA 35 - RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL 2-D.....	83
FIGURA 36 - RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO TMM.....	84

## RESUMO

Diversos Sistemas Geodésicos de Referência (SGR) têm sido usados na geração de produtos cartográficos brasileiros. Ainda, no Sistema Cartográfico Nacional coexistem sistemas de referência distintos. Atualmente, a Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), através do Projeto Mudança do Referencial Geodésico, promove a adoção do novo sistema geodésico de referência, geocêntrico e compatível com as modernas tecnologias de posicionamento, denominado SIRGAS2000 (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas, em sua realização do ano 2000). Com a adoção de SIRGAS2000 uma quantidade significativa de documentos cartográficos, em uso atualmente, terá que ser transformada ao novo referencial. Para a transformação de valores de coordenadas associados a um SGR em valores de coordenadas associados a outro SGR, a Geodésia proporciona diversos métodos e modelos de transformação, no entanto o IBGE fornece os modelos e parâmetros de transformação oficiais para o Sistema Geodésico Brasileiro. Embora, ainda não são divulgados métodos e parâmetros oficiais para a transformação entre todos os referenciais geodésicos ainda em uso no Brasil. O presente trabalho tem como objetivo avaliar um modelo de transformação bidimensional para transformar bases cartográficas de escala 1:10.000, associadas a diferentes referenciais geodésicos, ao SIRGAS2000. Para isto, são realizados, a partir de dados sintéticos, dois grupos de testes: o primeiro, para avaliar o impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas, e o segundo, para avaliar modelos de transformação bidimensional.

## RESUMEN

Diversos Sistemas Geodésicos de Referencia (SGR) han sido usados en la elaboración de productos cartográficos brasileños. Aun en el mismo Sistema Cartográfico Nacional coexisten sistemas de referencia distintos. Actualmente, la Fundación Instituto Brasileño de Geografía y Estadística (IBGE), a través del Proyecto Mudanza del Referencial Geodésico, promueve la adopción del nuevo sistema geodésico de referencia, geocéntrico y compatible con las modernas tecnologías de posicionamiento, denominado SIRGAS2000 (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas, en su realización del año 2000). Con la adopción de SIRGAS2000 una cantidad significativa de documentos cartográficos, en uso actualmente, tendrá que ser transformada al nuevo referencial. Para la transformación de valores de coordenadas asociados a un SGR en valores de coordenadas asociados a otro SGR, la Geodesia proporciona diversos métodos y modelos de transformación, en tanto, el IBGE proporciona los modelos y parámetros de transformación oficiales para el Sistema Geodésico Brasileño. Sin embargo, aun no son divulgados métodos y parámetros oficiales para la transformación entre todos los referenciales geodésicos que aun están en uso en Brasil. El presente trabajo tiene como objetivo evaluar un modelo de transformación bidimensional para transformar bases cartográficas de escala 1:10.000, asociadas a diferentes referenciales geodésicos, a SIRGAS2000. Para esto, son realizados, a partir de datos sintéticos, dos grupos de tests: el primero, para evaluar el impacto de la mudanza de referencial geodésico en la geometría de las bases cartográficas, y el segundo, para evaluar modelos de transformación bidimensional.

## ABSTRACT

Diverse Geodesic Reference Systems (GRS) has been used in the making of Brazilian cartographic products. Furthermore, in the National Cartographic System different reference systems coexist. Currently, the Brazilian Institute of Geography and Statistic Foundation (IBGE), through the Change of the Geodesic Reference Project, promotes the adoption of the new geodesic reference system denominated SIRGAS2000 (Geocentric Reference System for the Americas, in its accomplishment of year 2000). This system is geocentric and compatible with the modern technologies of positioning. Due to the implementation of SIRGAS2000, a significant amount of cartographic documents, currently in use, will have to be converted to the new reference system. To transform the values of coordinates associated with a specific GRS to the values of a different GRS's coordinates, the Geodesy provides diverse methods and conversion models. Meanwhile, the IBGE gives the models and the authorized transformation parameters for the Brazilian Geodesic System. Nevertheless, there are not official methods and parameters for the conversion among all the geodesic referential that are still in use in Brazil. The objective of this work is the evaluation of a bidimensional transformation to convert cartographic bases of 1:10.000 scales, associated to different geodesic referentials, to SIRGAS2000. Starting from synthetic data, two groups of tests are realized. The first trial is to evaluate the impact of geodesic referential change in the geometry of cartographic bases. The second, to evaluate models of bidimensional transformation.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Base cartográfica é um conjunto de informações definidoras de uma estrutura espacial de dados de referência, que serve de base ou plataforma para a geração de produtos cartográficos de propósitos gerais e específicos. O elemento fundamental de uma base cartográfica é o Sistema Geodésico de Referência (SGR), que permite estabelecer um apoio para as informações a serem referenciadas e estabelecer uma apropriada articulação dos produtos cartográficos num determinado território. O fato de uma base cartográfica ser a plataforma para a geração de produtos cartográficos, implica que as características geométricas dos produtos derivados são definidas ou condicionadas pela base cartográfica.

Um SGR é uma convenção estabelecida para permitir referenciar a posição espacial de qualquer feição sobre a superfície terrestre, portanto, é a estrutura básica ou fundamental para o mapeamento. A Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é a instituição responsável pela definição, implantação e manutenção do Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Atualmente o IBGE, através do Projeto Mudança do Referencial Geodésico (PMRG), promove a adoção do novo sistema geodésico de referência, geocêntrico e compatível com as modernas tecnologias de posicionamento, denominado SIRGAS2000 (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas, em sua realização do ano 2000, época 2000,4). No grande Projeto Mudança de Referencial Geodésico, pela dimensão do problema a tratar, houve o estabelecimento de grupos de trabalho (IBGE, 2006b). Estes grupos de trabalho (GT) são numerados como segue:

GT1 – Divulgação

GT2 – Definição e Estratégias para Materialização do Sistema de Referência Geodésico

GT3 – Conversão de Referenciais

GT4 – Definição de Modelo Geoidal

GT5 – Impactos na Mudança do Referencial

GT6 – Normatização e Legislação

Estes grupos de trabalho são compostos por representantes de diferentes segmentos da sociedade. Nestes grupos estão presentes representantes do IBGE, das Universidades, e de Institutos Públicos e Privados, produtores e usuários de cartografia.

Com a Resolução PR-1/2005 - IBGE, de 25 de fevereiro de 2005, fica estabelecido como novo sistema geodésico de referência, para o SGB e o Sistema Cartográfico Nacional (SCN), o SIRGAS2000. A resolução estipula um prazo não superior a dez anos para que os usuários ajustem suas bases de dados, métodos e procedimentos ao novo sistema. Neste período, denominado como Período de Transição, o SIRGAS2000 poderá ser utilizado em concomitância com os SGR anteriores, assim para o caso do SGB poderá ser utilizado simultaneamente com o SAD69, e para o SCN com os sistemas SAD69 e Córrego Alegre (IBGE, 2005, p.1).

O SGR Córrego Alegre foi oficialmente adotado no país da década de 50 até a década de 70. Sua superfície de referência é o Elipsóide Internacional de Hayford de 1924 com origem no vértice de Córrego Alegre. Este sistema ainda é importante, devido a existência de grande quantidade de documentos cartográficos e coordenadas referidas a este sistema, e além disso, ainda se atualizam e produzem cartas neste sistema (DALAZOANA & FREITAS, 2002, p. 67).

O sistema SAD69 foi adotado na década de 70 e sua superfície de referência é o Elipsóide Internacional de 1967, com uma pequena alteração no achatamento que foi aproximado à segunda casas decimal. Como ponto de origem adotou-se o vértice de triangulação Chuá. O primeiro ajustamento da rede foi realizado no *Defense Mapping Agency*, dos EUA. Dadas as limitações computacionais da época, a rede foi dividida em dez áreas de ajuste e processadas separadamente. Em 1996 foi feito um reajustamento simultâneo, em que foram utilizadas todas as observações que compõem a rede de controle horizontal, sejam elas obtidas por métodos clássicos ou espaciais (IBGE, 1996, p. 2). Este reajustamento resultou numa nova realização do SAD69, o SAD69 realização 1996. Apesar de ser uma nova realização não há um termo oficial diferenciador para esta segunda realização do SAD69. Neste trabalho, será usado o termo “SAD69/96” para fazer

referência especificamente à segunda realização do SAD69. Apesar de não ser oficial, o termo SAD69/96 já foi utilizado pelo Grupo de Trabalho 3 do PMRG para diferenciar a segunda realização do SAD69 da primeira (OLIVEIRA, 2002, não paginado).

A maior parte do mapeamento sistemático no Brasil ainda está referenciada ao SGR Córrego Alegre, como pode-se verificar na Tabela 1, apesar do SAD69 ter sido adotado como SGR oficial na década de 70.

TABELA 1 - NÚMERO DE CARTAS DO MAPEAMENTO SISTEMÁTICO VINCULADAS AO SGB CÓRREGO ALEGRE E SAD69

Escala	Córrego Alegre	SAD69
1:1.000.000	-	46
1:250.000	320	397
1:100.000	1115	963
1:50.000	1262	313
1:25.000	148	240
Percentual	59,22%	40,78%

FONTE: DALAZOANA (2001); SUBIZA (2007)

As diferenças entre as coordenadas SAD69/96 e o SIRGAS em sua realização 1998 não se apresentam homogêneas sobre o território nacional. Estas diferenças variam aproximadamente entre 58 m e 73 m, para as Regiões Nordeste e Sul do Brasil respectivamente (COSTA, S.M.A. 1999, p. 94). Estas diferenças, em média 65 m, são perceptíveis pelo olho humano já na escalas 1:250.000, onde o deslocamento é representado por 0,26 mm (SWISS SOCIETY OF CARTOGRAPHIC, 1987, p.13). Esta situação comparativa pode ser aplicada ao SIRGAS2000 uma vez que o SIRGAS é uma densificação do ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) em suas respectivas épocas, e não apresenta diferenças significativas para fins cartográficos.

## 1.2 SITUAÇÃO DO PROBLEMA

Com a adoção do SIRGAS2000 uma quantidade significativa de documentos cartográficos em uso atualmente terá que ser transformada ao novo referencial. Para a transformação de valores de coordenadas associados a um SGR em valores de coordenadas associados a outro SGR, a Geodésia proporciona diversos métodos e modelos de transformação. No entanto, o IBGE fornece os modelos e parâmetros de transformação oficiais para o SGB.

Na resolução PR-1/2005 - IBGE, há a definição dos parâmetros de transformação entre os sistemas de referência SAD69/96 e SIRGAS2000. Para as transformações entre os sistemas Córrego Alegre e SAD69, o modelo e parâmetros são fornecidos na resolução PR22 – IBGE de 21 de julho de 1983. Mas, ainda não é divulgado o modelo de transformação do SIRGAS2000 para os sistemas Córrego Alegre e SAD69 primeira realização. Como solução alternativa para a transformação de valores de coordenadas associados ao sistema de referência Córrego Alegre a valores de coordenadas associadas ao SIRGAS2000 poderia-se utilizar os modelos e parâmetros oficiais em uma transformação intermediária ao sistema de referência SAD69, antes de transformar ao sistema SIRGAS2000. Apesar de utilizar parâmetros e modelos oficiais, o procedimento deve ser avaliado em razão da precisão obtida depois da transformação, que deverá satisfazer requisitos de uso dos dados.

Para analisar a validade dos parâmetros oficiais na transformação entre sistemas geodésicos de referência em produtos cartográficos, DALAZOANA & FREITAS (2002) apresentam os resultados de testes que comparam os parâmetros oficiais com parâmetros calculados a partir da amostra de vértices fornecida pelo IBGE. Um primeiro teste consistiu na determinação de sete parâmetros, três translações, três rotações e um fator de escala. Um segundo teste consistiu na determinação de três translações somente. Os testes foram aplicados para avaliar os parâmetros oficiais entre Córrego Alegre e SAD69 primeira realização inicial. O resultado obtido mostra diferenças de 10 m aproximadamente, diferenças que são significativas para bases cartográficas em escalas maiores que



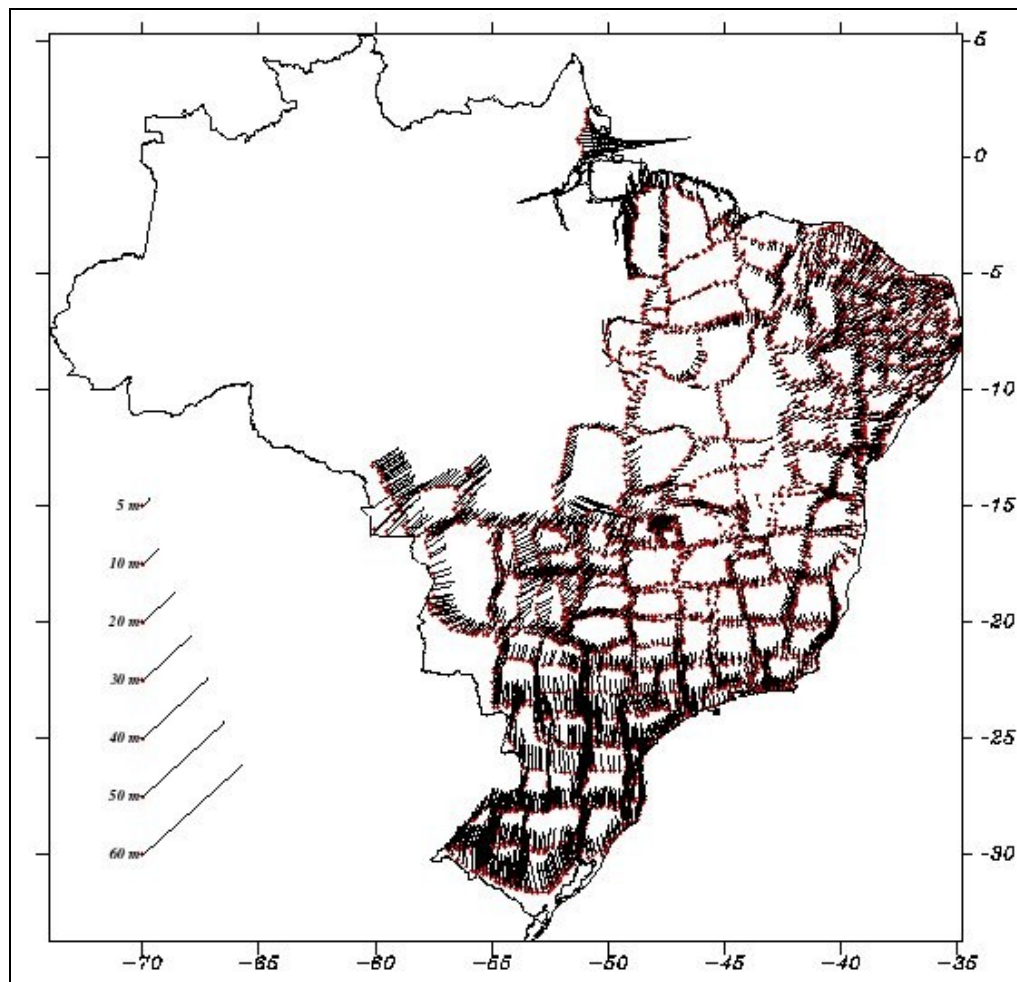
1:50.000. Os testes aplicados para diferentes regiões brasileiras (estados), mostram diferenças significativas de região para região e muito diferentes em comparação com os parâmetros oficiais que abrangem todo o território brasileiro. Os autores mencionam que as diferenças encontradas nos testes evidenciam a não homogeneidade da rede e indicam que os parâmetros oficiais existentes não permitem modelar de forma eficaz a total variação das coordenadas em diferentes regiões do país.

A inclusão de novas observações ou uma nova metodologia de ajustamento das observações que materializam um SGR altera os valores das coordenadas dos pontos de referência produto dos erros aleatórios, sistemáticos e eventualmente erros grosseiros introduzidos no processo de materialização do SGR. Assim, entre as duas realizações do SAD69 existem diferenças nos valores de coordenadas para pontos de referência homólogos, exceto para as coordenadas do ponto origem ou “*Datum*” que, no processo de reajustamento, manteve-se inalterado. Estas diferenças são evidenciadas ao comparar os valores de coordenadas de pontos em SAD69 realização inicial e os valores de coordenadas dos mesmos pontos em SAD69/96. Na Figura 1 observa-se diferenças que aumentam em magnitude de maneira sistemática na medida que a rede abrange o território brasileiro, desde o ponto origem do sistema SAD69 (vértice Chúa), e alcança valores maiores que 10 metros em magnitude em algumas zonas extremas do território, magnitudes que são significativas para escalas maiores que 1:50.000. Assim, é de se esperar que uma quantidade importante de documentos cartográficos em escala grande, referenciados nominalmente ao mesmo Sistema Geodésico de Referência SAD69, mas em realizações distintas, apresentem diferenças significativas quando comparadas as coordenadas que descrevem uma mesma feição.

Oficialmente ainda não se tem modelo e parâmetros de transformação entre as duas realizações do SAD69 devido a que os sistemas definidos são os mesmos e, portanto, não é aplicável um modelo de transformação clássica, sem considerar a modelagem das diferenças dos valores de coordenadas entre realizações de um mesmo SGR. As pesquisas orientadas à compatibilização entre realizações de um mesmo referencial geodésico são: a) OLIVEIRA (1998) que considera a estimação de parâmetros de uma Transformação

Geométrica Afim Geral 3D aplicada por regiões à rede, e a aplicação de correções locais determinadas por modelagem geométrica; e b) COSTA M. F. (1999) que utiliza uma Transformação de Similaridade no espaço tridimensional, associada ao conceito de modelagem dos resíduos.

FIGURA 1 - VETOR DE DESLOCAMENTO DAS COORDENADAS HORIZONTAIS REFERIDAS AO SAD69/96 EM RELAÇÃO AO SAD69 PRIMEIRA REALIZAÇÃO



FONTE: IBGE, 1996

Por outro lado, observa-se que mesmo com a definição de SGR's oficiais, no Brasil coexistem outros sistemas de referência, não oficiais, utilizados na geração de diversos documentos cartográficos produzidos por diferentes órgãos e empresas componentes do SCN (GUIMARÃES et al, 2003, não paginado). Este fato evidencia duas situações que merecem atenção:

- a) A inobservância da Norma Nacional, por organismos componentes do SCN, ocasiona problemas diversos na articulação da cobertura cartográfica do território nacional, na integração de bancos de dados geográficos, no uso combinado de informações espaciais geradas por diferentes organismos, na atualização dos produtos cartográficos, entre outros. Em resumo, dificulta o uso integrado de dados espaciais na administração do território.
- b) A mudança de referencial promovida pelo PMRG torna-se complexa para usuários de bases cartográficas associadas a alguns dos diversos SGR's, não oficiais, porquanto modelos e parâmetros de transformação oficiais divulgados pelo PMRG e que atendem ao SGB, não é seguro que sejam aplicáveis a casos particulares. Portanto, se deverá realizar esforços adicionais na procura de modelos e parâmetros de transformação para cada situação particular.

### 1.3 ENFOQUE DE PESQUISA

A adoção oficial do SIRGAS2000 implica na necessidade de integração, ao novo referencial, de uma grande quantidade de documentos cartográficos gerados em sistemas geodésicos de referência antigos, oficiais e não oficiais, mas atualmente em uso. Portanto, existe demanda por métodos e parâmetros de transformação para realizar a mudança de referencial geodésico, com a suficiente acurácia em decorrência das necessidades do uso particular dos produtos cartográficos.

O PMRG, no objetivo de promover a adoção do SIRGAS2000, contempla várias atividades em conjunto a organismos públicos e privados. Estas atividades podem ser descritas como (IBGE, 2006):

- (1) suporte aos usuários, atendimento e divulgação;
- (2) definição de estratégias para a materialização do Sistema de

Referência a ser adotado;

- (3) determinação de parâmetros de conversão entre sistemas de coordenadas existentes e o novo, desenvolvendo aplicativos para este fim;
- (4) indicação do modelo geoidal mais adequado ao novo referencial;
- (5) proposição de soluções aos problemas inerentes à conversão da Cartografia Topográfica Sistemática (1:1.000.000 a 1:25.000) e da Cartografia Topográfica em escala 1:10.000 a 1:500, incluída a cartografia cadastral;
- (6) avaliação dos impactos da mudança nas áreas de Geodésia, Cartografia, SIG e Informações Espaciais, Documentação Legal e Tributária, etc;
- (7) elaboração da parte legislativa e normativa para a adoção do novo referencial.

Esta pesquisa se insere nos pontos (3), (5) e (6), especificamente na avaliação de um modelo de transformação para bases cartográficas de escala 1:10.000, considerando que nas escalas grandes o impacto da mudança de referencial é maior.

Apresenta-se, então, como enfoque de pesquisa, a avaliação de um modelo de transformação para bases cartográficas de escala 1:10.000, atualmente em uso, com o sistema de referência SIRGAS2000.

A pesquisa é orientada para:

- a) Atender ao mapeamento urbano na consideração do amplo uso e exploração destas informações no planejamento e desenvolvimento de projetos, como também na geração de outros produtos cartográficos de propósitos específicos;
- b) Atender às bases cartográficas em escala grande (1:10.000) associadas a SGR's oficiais ou não oficiais, e portanto aplicáveis especificamente a

situações locais.

- c) Atender a uma abrangência geográfica limitada pela extensão territorial de bases cartográficas de zonas urbanas, e portanto restrita à avaliação da solução no contexto local.

Para a compatibilização entre referenciais geodésicos de bases cartográficas de escala 1:10.000, propõe-se uma abordagem baseada no estudo das alterações geométricas nas bases cartográficas, advindas de uma mudança do referencial geodésico, e na avaliação de modelos de transformação bidimensional, visando a transformação do referencial geodésico da base cartográfica. O conhecimento das alterações geométricas e a avaliação dos modelos de transformação permitirá determinar um modelo matemático apropriado que relacione a geometria de ambas bases cartográficas, e portanto que permita realizar a transformação de uma base cartográfica a um outro referencial geodésico.

#### 1.4 JUSTIFICATIVA

Justificam a pesquisa, ora apresentadas, a necessidade da sociedade usuária de cartografia de escala grande de contar com bases cartográficas compatíveis com SIRGAS2000, e os esforços levantados pela comunidade através do PMRG na procura de métodos e parâmetros para a mudança de referencial geodésico válidos para atuais bases cartográficas de escalas grandes. A transformação das atuais bases cartográficas de escala 1:10.000 ao SIRGAS2000 permitirá:

- a) a abordagem de estudos com informações contidas em documentos cartográficos referenciados em distintos SGR. Por exemplo, no contexto do cadastro territorial, a transformação das bases cartográficas permitirá o estudo de conflitos de limites prediais mapeados em diferentes sistemas de referência;
- b) o uso integrado de grande quantidade de documentos cartográficos, gerados em diversos referenciais, com as novas tecnologias de

- posicionamento e gerenciamento de informações espaciais; e
- c) que empresas de serviços poderão adotar SIRGAS2000 como referencial geodésico em seus sistemas cadastrais, com aproveitamento das atuais bases cartográficas.

## 1.5 OBJETIVOS

### 1.5.1 Objetivo geral

Tem-se como objetivo geral avaliar um modelo de transformação bidimensional entre bases cartográficas de escala 1:10.000, associadas a diferentes referenciais geodésicos, ao SIRGAS2000.

### 1.5.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral propõe-se os seguintes objetivos específicos

- Discutir o impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas em escala grande.
- Indicar alguns modelos de transformação de espaços, que possam ser aplicados a bases cartográficas em escala grande.
- Apresentar alguns modelos de transformação bidimensional entre bases cartográficas, aplicável a escala grande.
- Apresentar um método para avaliar os modelos de transformação bidimensional entre bases cartográficas, aplicável a escala grande.

## 2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

### 2.1 SISTEMA GEODÉSICO DE REFERÊNCIA

Um Sistema Geodésico de Referência (SGR) consiste em um sistema de coordenadas com métrica e curvatura definidos, materializado por um conjunto de coordenadas de pontos de referência (GAPOSCHKIN & KOLACZED, 1981 apud TORGE, 1991, p. 35), e permite estabelecer a localização espacial de qualquer feição sobre a superfície terrestre. A implantação de um SGR é dividida em duas partes: a) definição, que caracteriza a concepção do sistema, e b) materialização (ou realização), composta pela coleta, processamento e análise de observações feitas a partir de pontos definidos fisicamente sobre a superfície da Terra, e pela divulgação dos resultados, que é, essencialmente, um conjunto de coordenadas, e respectivas estimativas de erro, associados a uma época particular (MONICO, 2000, p. 59).

Nos métodos clássicos em Geodésia a determinação de posições precisas sobre a superfície terrestre implica na necessidade de adoção de dois SGR's. Um SGR horizontal, que fornece a referência para a determinação das componentes de latitude e longitude; e outro SGR vertical, que fornece a referência para a determinação da componente altimétrica. Entretanto, a componente altimétrica de um ponto assim determinada não pode ser considerada uma terceira coordenada coerente com as anteriores (latitude e longitude), pois esta se refere ao geóide (GEMAEL, 2004, p. 13). A materialização destes sistemas de referência, expressos como redes horizontais e redes verticais, era feita separadamente por motivos técnicos e econômicos na razão de que estes requerem diferentes classes de observações de campo (VANICEK & KRAKIWSKY, 1986, p. 98).

Um SGR horizontal clássico é definido por um elipsóide de revolução e seu posicionamento no espaço. O elipsóide é escolhido de forma a garantir sua adaptação ao geóide na região de interesse. Os parâmetros definidores do sistema, orientação, posicionamento e forma, estão vinculados a um ponto na superfície terrestre, denominado *Datum*, e aos parâmetros de forma do elipsóide, semi eixo maior ( $a$ ) e achatamento ( $f$ ). O

centro deste elipsóide não coincide necessariamente com o centro de massa da Terra (COSTA, M. F. 1999, p. 17). Os sistemas Córrego Alegre, Chuá Astro-Datum e o SAD69 são exemplos de SGR de concepção clássica.

Por outro lado, a definição de um referencial geodésico moderno pressupõe a adoção de um sistema de coordenadas tridimensional com origem coincidente com o centro de massa da Terra e cujos eixos são solidários a ela. O eixo  $Z$  coincidente com o eixo médio de rotação da Terra num dado período, o plano  $XZ$  contém o meridiano de referência e o eixo  $Y$  é perpendicular aos eixos  $X$  e  $Z$ , de modo a formar um sistema de polaridade dextrógira. O sistema é associado à Terra por quatro parâmetros: o raio equatorial; a constante gravitacional geocêntrica  $GM$  (com ou sem atmosfera); o harmônico zonal de segunda ordem do potencial gravitacional da Terra ( $J_2$ ); e a velocidade de rotação da Terra ( $\omega$ ).

A materialização dos SGR modernos, tal como para os sistemas clássicos, é feita por determinação das coordenadas de uma rede de pontos definidos fisicamente sobre a superfície da Terra (redes geodésicas). Os métodos e procedimentos utilizados para o estabelecimento de coordenadas são baseados em técnicas espaciais de posicionamento. Um exemplo de referencial moderno é o ITRS (*IERS Terrestrial Reference System*) que é baseado nas técnicas de posicionamento espacial de alta precisão: VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Ranging*), LLR (*Lunar Laser Ranging*), GPS (*Global Positioning System*), e DORIS (*Doppler Orbitography by Radio-Positioning Integrated on Satellite*). As realizações de um ITRS recebem a denominação ITRF (*IERS Terrestrial Reference Frame*), acompanhada pelo ano (AA) em que foi realizada (IERS, 2004, p.25).

O Projeto SIRGAS foi iniciado na Conferência Internacional para Definição de um Datum Geocêntrico para a América do Sul, realizada em outubro de 1993 em Assunção, Paraguai, com a finalidade de estabelecer ações para definir, materializar e manter um sistema de referência geocêntrico tridimensional na América do Sul. Para atender estes objetivos foram adotadas as seguintes definições (IBGE, 1997, p.1):

- a) sistema de referência SIRGAS: Materialização do International Terrestrial



Reference System (ITRS) na América do Sul via estações GPS, para propiciar uma rede continental vinculada a um International Terrestrial Reference Frame (ITRF) em dada época;

- b) modelo geométrico geocêntrico: eixos coordenados baseados no ITRS e parâmetros do elipsóide GRS80.

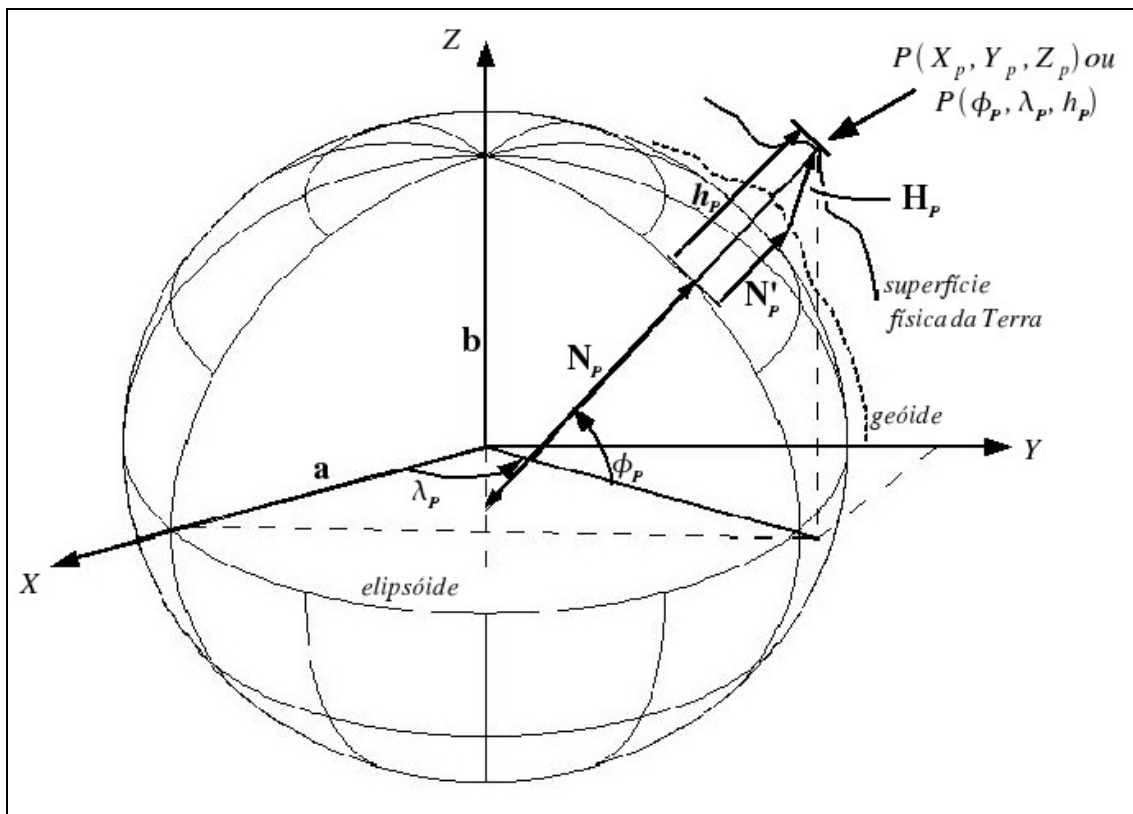
A realização inicial do sistema SIRGAS foi composta por 58 estações distribuídas na América do Sul. As coordenadas das estações SIRGAS foram determinadas numa campanha GPS realizada no período de 26 de maio a 4 de junho de 1995 e referidas ao ITRF94, época 1995,4 (IBGE, 1997, p. 12). Em julho de 1999 foi planejada a realização da campanha SIRGAS 2000, que considera atender também à componente altimétrica, assim como estender o projeto à América Central, América do Norte e ao Caribe. A realização do SIRGAS ano 2000 foi feita a partir de observações em 184 estações distribuídas pelo continente americano. As observações foram feitas no período de 10 de maio a 19 de maio de 2000, e referidas ao ITRF2000, época 2000,4 (SIRGAS, 2002, p 10).

## 2.2 SISTEMA GEODÉSICO CARTESIANO

Um Sistema Geodésico Cartesiano pode ser definido como aquele que tem:

- origem coincidente com o centro geométrico do elipsóide e este coincidente com o centro de massa da Terra quando o sistema tem uma concepção global, e não coincidente com o centro de massa da Terra num sistema de concepção regional;
- eixo  $Z$  coincidente com o eixo de revolução do elipsóide e é orientado para o Norte. O plano primário corresponde, portanto, ao equatorial geodésico;
- plano secundário contém o meridiano de referência de longitudes geodésicas. O semi-eixo primário positivo está contido naquele plano;
- polaridade dextrógira.

FIGURA 2 - SISTEMA GEODÉSICO CARTESIANO



A relação entre as coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda, h)$  e as coordenadas cartesianas de um ponto  $P(X_p, Y_p, Z_p)$  sobre a superfície física da Terra, é dada por:

$$\begin{aligned} X_p &= (N_p + h_p) \cos \phi_p \cos \lambda_p \\ Y_p &= (N_p + h_p) \cos \phi_p \sin \lambda_p \\ Z_p &= (N_p (1 - \epsilon^2) + h_p) \sin \phi_p \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $(\phi_p, \lambda_p, h_p)$  são os valores da latitude, longitude e altitude elipsóidica do ponto P, respectivamente.  $N_p$  na expressão (1) é a grande normal, dada por:

$$N_p = \frac{a}{(1 - \epsilon^2 \sin^2 \phi_p)^{1/2}}, \quad (2)$$

e  $\epsilon^2$  é a primeira excentricidade do elipsóide ao quadrado dada por:

$$\epsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad (3)$$

em que  $a$  e  $b$  são os semi-eixos maior e menor do elipsóide respectivamente. Os valores  $N'_p$  e  $H_p$ , na Figura 2, representam os valores de altitude geoidal e altitude ortométrica, respectivamente.

Para a transformação inversa, tem-se:

$$\begin{aligned}\phi_p &= \arctan \left[ \frac{Z_p + \epsilon'^2 b \sin^3 u}{\left( (X_p^2 + Y_p^2)^{1/2} - \epsilon'^2 a \cos^3 u \right)} \right] \\ \lambda_p &= \arctan \left[ \frac{Y_p}{X_p} \right] \\ h_p &= \frac{\left( (X_p^2 + Y_p^2)^{1/2} \right)}{\cos \phi_p} - N_p\end{aligned}\tag{4}$$

onde  $\epsilon'^2$  é a segunda excentricidade do elipsóide ao quadrado, dada por:

$$\epsilon'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2},\tag{5}$$

e  $u$  é dado por:

$$u = \arctan \left[ \left( \frac{Z_p}{\left( (X_p^2 + Y_p^2)^{1/2} \right)} \right) \left( \frac{a}{b} \right) \right]\tag{6}$$

### 2.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES SISTEMAS GEODÉSICOS DE REFERÊNCIA.

A adoção de um novo sistema geodésico de referência implica na necessidade de determinar novos valores de coordenadas para as feições mapeadas e referenciadas num sistema antigo. Dois caminhos de solução podem ser apresentados: 1) refazer os levantamentos de todas as feições, mas agora referidas ao novo sistema; ou 2) determinar um modelo matemático que permita transformar as coordenadas que definem espacialmente a posição das feições para um novo sistema de referência.

Existem vários modelos para transformação de coordenadas entre Sistemas Geodésicos de Referência. Uma proposta de classificação é apresentada por OLIVEIRA (1998, p.30). A classificação é dada em cinco categorias:

a) equações cartesianas – modelos desenvolvidos a partir do emprego das

coordenadas retilíneas, em que são consideradas as grandezas translação, rotação e escala. São também conhecidas como Transformações geométricas. Exemplos destes são os modelos de Transformação de Similaridade de Bursa/Wolf, Molodenskii-Badekas, Veis e Vanícek-Wells;

- b) equações diferenciais – modelos aplicados tanto às coordenadas curvilíneas quanto retilíneas, são desenvolvidos considerando o efeito causado pelas diferenças referentes à forma e tamanho dos elipsóides associados aos sistemas de interesse, bem como às diferenças nos seus posicionamentos com relação à superfície terrestre;
- c) regressões – modelos que empregam coordenadas curvilíneas ou retilíneas, e que estabelecem um modelo polinomial, de ordem variável, para efetuar a transformação. São também chamados de Equações de Regressão Múltiplas, Polinômios Conformes e Transformações Projetivas;
- d) modelagem analítica – a partir das diferenças de coordenadas, retilíneas ou curvilíneas, dos pontos homólogos nos sistemas de interesse, são empregados métodos analíticos para a geração de um modelo, ou processo matemático apropriado, que sirva à transformação. Podem ou não considerar, e quantificar as deformações existentes entre os sistemas;
- e) mapas de interpolação – consistem na geração de mapas de isolinhas ou malhas (reticulados) regulares, digitais ou não, referentes aos valores que permitem a transformação das coordenadas.

Ainda deve-se acrescentar uma sexta categoria:

- f) modelos não determinísticos baseados em predição analítica tal como os baseados em Redes Neurais Artificiais (CRIOLLO et al, 2005)

Apesar da quantidade de modelos disponíveis, o modelo de Transformação de Similaridade é o modelo mais utilizado atualmente em Geodésia (ANCIÃES & OLIVEIRA, 2003, p. 91). Este modelo é também conhecido como transformação conforme, isogonal, e de Helmert (LUGNANI, 1987, p.102) ou, ainda, como modelo de transformação de Bursa/Wolf (RAPP, 1981, p. 54).

O modelo de Transformação de Similaridade expressa a relação entre dois sistemas de coordenadas por meio de três translações ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ), três rotações ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ) e um fator de escala ( $1+\delta m$ ). As três translações são justificadas pela não coincidência da origem dos dois sistemas; três rotações são necessárias para expressar o não paralelismo entre eixos e um fator de escala é requerido para uniformizar ou homogeneizar a métrica dos dois sistemas.

O modelo matemático que representa a Transformação de Similaridade é dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \delta m) \cdot R_c(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (7)$$

em que:

- $R_c$  é denominada de Matriz Cardan. Os ângulos ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ) são as rotações, respectivamente, em torno dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Estas rotações são suficientemente pequenas tal que podem-se considerar  $\cos\omega_i \cong 1$  e  $\sin\omega_i \cong \omega_i$ . Desta maneira a matriz  $R_c$  pode ser dada por:

$$R_c(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \approx \begin{bmatrix} 1 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 1 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

- $[\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}]^T$  é o vetor das coordenadas de  $S_2$ , ou seja, sistema para o qual se quer transformar as coordenadas;
- $[X, Y, Z]^T$  é o vetor das coordenadas de  $S_1$ , ou seja, sistema do qual se quer transformar as coordenadas;
- $[\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$  é o vetor das translações efetuadas em cada um dos eixos e expressa a posição da origem do sistema  $S_2$  em relação do sistema  $S_1$

- $(1 + \delta m) = k$  corresponde ao fator de escala da transformação. O valor  $\delta m$  corresponde a uma diferença relativa de escala entre os dois sistemas.

Para a aplicação da Transformação de Similaridade às feições representadas numa base cartográfica é necessário primeiro obter o terno de coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda, h)$ . Os termos  $(\phi, \lambda)$  são obtidos diretamente ao aplicar às coordenadas de projeção, das feições mapeadas, as funções inversas da projeção cartográfica. O valor  $h$ , em geral, não é conteúdo da base cartográfica e portanto deve ser deduzido a partir de outras informações: altitude ortométrica ( $H$ ) e altitude geoidal ( $N'$ ), em razão que  $h \cong H + N'$

A altitude ortométrica para cada feição da base cartográfica pode ser obtida a partir das curvas de nível num processo de interpolação. O valor da altitude geoidal ( $N'$ ) pode ser obtido de mapas de altitudes geoidais da região. Embora este procedimento não apresente nenhuma complicação do ponto de vista matemático, na prática apresenta complicações. Por um lado a quantidade de cálculos do processo de transformação aumenta significativamente por conta do procedimento de interpolação, na procura do valor  $H$  para cada ponto que define espacialmente cada feição mapeada, e por outro lado a não disponibilidade, em alguns casos, de mapas de altitudes geoidais para determinar o valor  $N'$ . Na impossibilidade de determinar a componente altimétrica ( $h$ ) usa-se, para efeito da transformação, considerar a altitude elipsóidica como igual a zero ( $h=0$ ), ou caracterizar o conjunto de dados como bidimensional. Uma avaliação destes procedimentos é abordado por ANCIÃES & OLIVEIRA (2003).

## 2.4 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS

Pode-se definir Projeção Cartográfica como a relação bi-unívoca entre pontos da superfície do elipsóide (ou da esfera) e pontos da superfície de representação, chamada superfície de projeção. Poderia definir-se um conjunto infinito de relacionamentos entre as duas superfícies, mas é usual que o relacionamento se dê por meio das duas famílias de

curvas, as que representam os paralelos e meridianos da superfície de referência e da superfície de projeção.

Segundo BLACHUT *et al* (1979, p. 39), a maioria dos levantamentos urbanos são suficientemente pequenos em extensão, e assim o erro interno causado por não considerar a curvatura terrestre pode considerar-se insignificante comparado com as precisões das respectivas medições. No entanto, o mesmo autor afirma que devido ao crescimento das regiões urbanas, muitas vezes imprevisível, faz-se necessário considerar a utilização de uma projeção cartográfica, pois ao estender arbitrariamente o levantamento, sem a consideração da curvatura terrestre, pode-se acarretar na acumulação de erros ou discrepâncias internas, sem controle, excedendo o erro tolerável.

Por outro lado, uma projeção cartográfica contribui para o resgate das coordenadas referidas ao SGR de cada feição representada na base cartográfica, assim como o uso integrado das informações com as atuais tecnologias de posicionamento e gerenciamento de informações espaciais. Ademais, utilizar a projeção que é compatível com o sistema de projeção padrão num território, contribui para a integração de bases cartográficas vizinhas, na geração de produtos cartográficos derivados, e com abrangência territorial maior do que as definidas inicialmente para cada base cartográfica particular.

A impossibilidade de representar, sem distorção, uma superfície curva em uma superfície plana ou desenvolvível no plano, indica a necessidade de selecionar uma projeção cartográfica adequada a um uso específico. O estudo de superfícies, representadas por meio de curvas paramétricas, possibilita o desenvolvimento de projeções cartográficas, a transformação de uma superfície em outra, assim como avaliar o comportamento dos elementos transformados.

#### 2.4.1 Representação de superfícies por meio de curvas paramétricas

Conforme RICHARDUS & ADLER (1972, p. 34), um sistema de curvas de referência, ou curvas paramétricas, pode ser adotado sobre qualquer superfície curva.

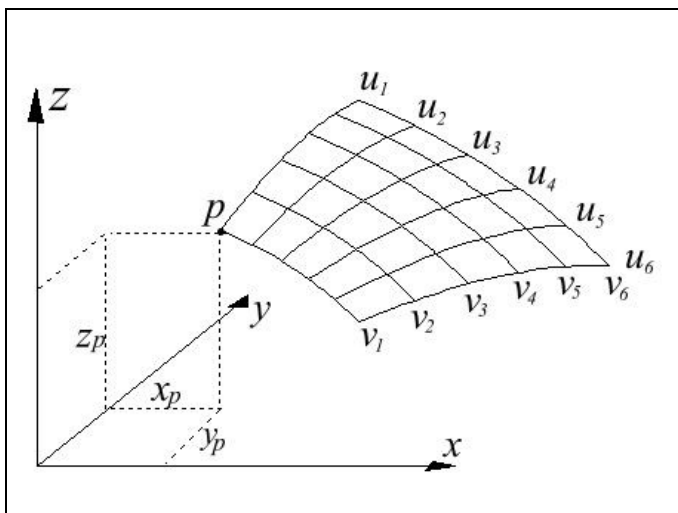
Assim a posição de um ponto pode ser determinada num sistema cartesiano tridimensional  $(x,y,z)$  em função das curvas paramétricas. Sejam  $u$  e  $v$  as curvas paramétricas (Figura 3).

Então a posição de um ponto é dada por:

$$\begin{aligned} x &= p_1(u, v) \\ y &= p_2(u, v) \\ z &= p_3(u, v) \end{aligned} \quad (9)$$

As funções  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  são denominadas equações paramétricas da superfície descrita pelas curvas paramétricas  $u$  e  $v$ , e relacionam estas curvas com o sistema cartesiano tridimensional.

FIGURA 3 - SUPERFÍCIE REPRESENTADA PELAS CURVAS PARAMÉTRICAS  $u$  E  $v$



FONTE: Adaptado de RICHARDUS & ADLER (1972)

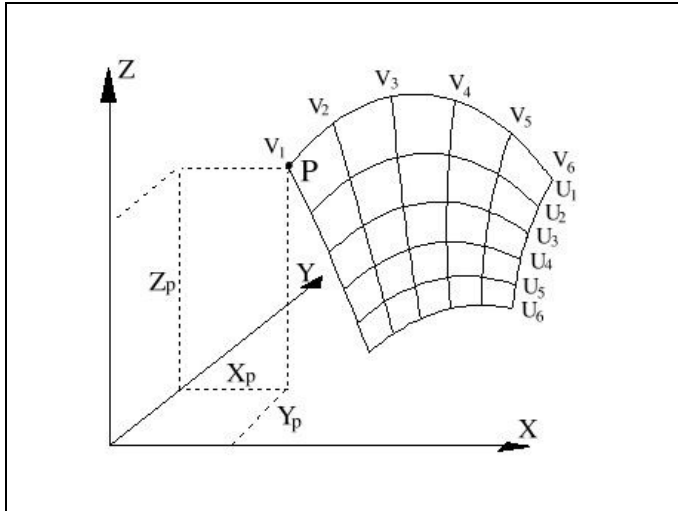
Uma segunda superfície pode ser relacionada em outro sistema cartesiano tridimensional  $(X,Y,Z)$  por um segundo conjunto de equações paramétricas, e a posição de um ponto é definida por:

$$\begin{aligned} X &= P_1(U, V) \\ Y &= P_2(U, V) \\ Z &= P_3(U, V) \end{aligned} \quad (10)$$



Assim,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são as equações paramétricas da superfície descrita pelas curvas paramétricas  $U$  e  $V$ , e relacionam as curvas paramétricas com o sistema o outro cartesiano tridimensional, o sistema  $XYZ$  (Figura 4).

FIGURA 4 - SUPERFÍCIE REPRESENTADA PELAS CURVAS PARAMÉTRICAS  $U$  E  $V$



FONTE: Adaptado de RICHARDUS & ADLER (1972)

É possível relacionar ambas superfícies em função de suas curvas  $u$ ,  $v$ ,  $U$  e  $V$ .

$$\begin{aligned} U &= q_1(u, v) \\ V &= q_2(u, v) \end{aligned} \quad (11)$$

e

$$\begin{aligned} u &= \bar{q}_1(U, V) \\ v &= \bar{q}_2(U, V) \end{aligned} \quad (12)$$

em que  $q_1$  e  $q_2$  são as funções que descrevem as curvas  $U$  e  $V$  por meio dos parâmetros  $u$  e  $v$ , e do mesmo modo,  $\bar{q}_1$  e  $\bar{q}_2$  são as funções que descrevem as curvas  $u$  e  $v$  por meio dos parâmetros  $U$  e  $V$ . Assim, as funções de transformação são dadas por:

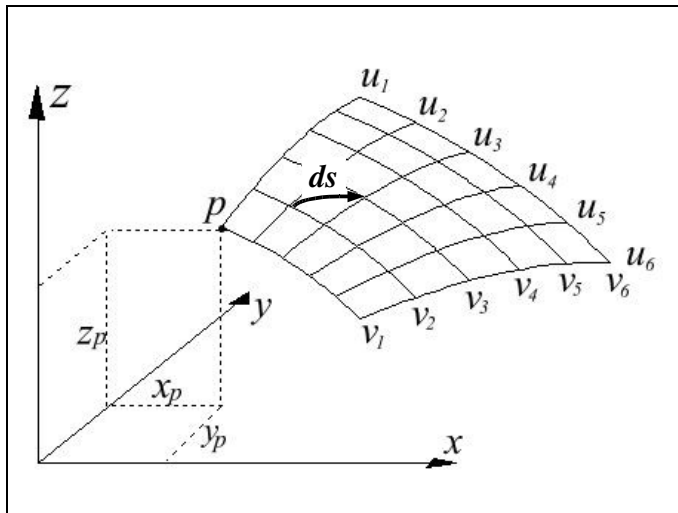
$$\begin{aligned} x &= p_1(u, v) & X &= r_1(u, v) \\ y &= p_2(u, v) & Y &= r_2(u, v) \\ z &= p_3(u, v) & Z &= r_3(u, v) \end{aligned} \quad (13)$$

As funções  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  descrevem a superfície representada pelas curvas paramétricas  $u$  e  $v$  no referencial  $(x,y,z)$ . As funções  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  descrevem uma segunda superfície em função dos parâmetros da primeira superfície no referencial  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Nos

termos da cartografia é possível representar a superfície de referência  $(x,y,z)$ , ou parte dela, na superfície da projeção  $(X, Y, Z)$ . No campo das projeções cartográficas  $Z=0$ , pois a superfície de projeção é uma superfície desenvolvível em um plano e o produto de uma projeção cartográfica está contido num plano.

Seguindo esta abordagem, é possível estabelecer a distorção de um comprimento infinitesimal quando este é representado numa outra superfície. O comportamento das distorções que alteram um arco infinitesimal, permite estabelecer a propriedade de uma projeção.

FIGURA 5 – COMPRIMENTO INFINITESIMAL  $ds$  NA SUPERFÍCIE REPRESENTADA PELAS CURVAS PARAMÉTRICAS  $u$  E  $v$



FONTE: Adaptado de RICHARDUS & ADLER (1972)

O comprimento infinitesimal de um arco sobre uma superfície qualquer (Figura 5), pode ser escrito como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (14)$$

Como a superfície é descrita pelas curvas paramétricas  $u$  e  $v$  as componentes  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  são funções tanto de  $u$  como de  $v$ . Então, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\delta x}{\delta u} du + \frac{\delta x}{\delta v} dv \\ dy &= \frac{\delta y}{\delta u} du + \frac{\delta y}{\delta v} dv \\ dz &= \frac{\delta z}{\delta u} du + \frac{\delta z}{\delta v} dv \end{aligned} \quad (15)$$

Substituindo as (15) na (14), desenvolvendo e reagrupando tem-se:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left\{ \left( \frac{\delta x}{\delta u} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{\delta u} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta u} \right)^2 \right\} du^2 + \\
 & + 2 \left\{ \frac{\delta x}{\delta u} \frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta y}{\delta u} \frac{\delta y}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta u} \frac{\delta z}{\delta v} \right\} du dv + \\
 & + \left\{ \left( \frac{\delta x}{\delta v} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{\delta v} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta v} \right)^2 \right\} dv^2
 \end{aligned} \tag{16}$$

Os coeficientes de  $du^2$ ,  $dudv$  e  $dv^2$  são chamados de Primeiras Quantidades Fundamentais de Gauss (PQFG) (RICHARDUS & ADLER, 1972, p. 36) e são identificados, em geral, pelas letras  $e$ ,  $f$  e  $g$ , respectivamente. Então, a equação (16) pode ser escrita como:

$$ds^2 = e du^2 + 2 f du dv + g dv^2 \tag{17}$$

Neste trabalho serão identificadas as PQFG com as letras  $e$ ,  $f$  e  $g$  quando são referidos a superfície de referência, e  $E$ ,  $F$  e  $G$ , quando são referidos a superfície de projeção. Assim também, as curvas  $u$  são definidas pelas curvas de latitudes constantes (paralelos), representadas por  $\phi$ , e  $v$  para as curvas de longitudes constantes (meridianos), representadas por  $\lambda$ . Assim, as PQFG para o elipsóide de referência são expressas como:

$$e = \left( \frac{\delta x}{\delta \phi} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{\delta \phi} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta \phi} \right)^2 = \left[ a \frac{(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \right]^2 \tag{18}$$

$$f = \frac{\delta x}{\delta \phi} \frac{\delta x}{\delta \lambda} + \frac{\delta y}{\delta \phi} \frac{\delta y}{\delta \lambda} + \frac{\delta z}{\delta \phi} \frac{\delta z}{\delta \lambda} = 0 \tag{19}$$

$$g = \left( \frac{\delta x}{\delta \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{\delta \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta \lambda} \right)^2 = N^2 \cos^2 \phi \tag{20}$$

sendo  $a$  o semi-eixo maior do elipsóide,  $\epsilon$  a primeira excentricidade e  $N$  a grande normal para o ponto avaliado. A quantidade  $e$  é também equivalente ao raio da seção meridiana ao quadrado, isto é  $e = M^2$ . Sendo assim, o comprimento de um arco infinitesimal ao quadrado pode ser escrito como:

$$ds^2 = M^2 d\phi^2 + N^2 \cos^2 \phi d\lambda^2 \quad (21)$$

Para a superfície de projeção as PQFG são:

$$e = \left(\frac{\delta X}{\delta \phi}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{\delta \phi}\right)^2 \quad (22)$$

$$f = \frac{\delta X}{\delta \phi} \frac{\delta X}{\delta \lambda} + \frac{\delta Y}{\delta \phi} \frac{\delta Y}{\delta \lambda} \quad (23)$$

$$g = \left(\frac{\delta X}{\delta \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{\delta \lambda}\right)^2 \quad (24)$$

A determinação das PQFG em função das curvas paramétricas  $\phi$  e  $\lambda$ , para o elipsóide e para o plano de projeção, permite determinar as distorções da superfície do elipsóide, ou parte dela, quando é representada no plano de projeção.

#### 2.4.1.1 Distorção de escala

A distorção de escala é definida pela razão entre um arco de comprimento infinitesimal na superfície de projeção e seu homólogo na superfície de referência. Em termos das PQFG a distorção de escala pode ser escrita como:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{E d\phi^2 + 2F d\phi d\lambda + G d\lambda^2}{e d\phi^2 + 2f d\phi d\lambda + g d\lambda^2} \quad (25)$$

Assim,  $m$  pode apenas assumir valores positivos. Quando  $m=1$  indica que não há distorção de escala naquele ponto avaliado e portanto a escala nominal é válida para aquele ponto. Quando  $m>1$  indica que há distorção de escala, o comprimento de um segmento representado, se afetado da escala nominal, produzirá um comprimento maior do que o comprimento homólogo na superfície de referência. Do mesmo modo, se  $m<1$  o comprimento de um segmento representado, se afetado da escala nominal, produzirá um comprimento menor do que o comprimento homólogo na superfície de referência.

### 2.4.1.2 Distorção de escala sobre as curvas paramétricas

A distorção de escala é dependente da orientação do segmento  $ds$  em decorrência de que para diferentes valores de  $du$  e  $dv$  se obtém diferentes valores de  $m$ . Se  $u$  e  $v$  representam as curvas paramétricas  $\phi$  e  $\lambda$  no elipsóide, então a expressão  $m_\phi$  representa a distorção de escala sobre os meridianos e  $m_\lambda$  representa a distorção de escala sobre os paralelos numa projeção cartográfica.

$$m_\phi = \sqrt{\frac{E}{e}} \quad (26)$$

e

$$m_\lambda = \sqrt{\frac{G}{g}} \quad (27)$$

Três principais critérios cartográficos são aplicados para a avaliação das projeções cartográficas:

- a) Equidistância: implica que existe uma família de linhas na projeção cujos comprimentos são representados em escala constante, isto é:

$$m_j = 1$$

- b) Conformidade: propriedade da projeção de manter os ângulos. Caracterizada por manter as formas de pequenas figuras. Considera-se pequenas figuras quando as geodésicas entre todos os vértices da figura podem ser consideradas como linhas retas na projeção. Com base no conceito de distorção de escala, conformidade significa a existência de um único valor e distorção de escala por ponto avaliado na projeção, independente da orientação do segmento  $ds$ , isto é:

$$m_\phi = m_\lambda = m$$

- c) Equivalência: implica que o valor numérico das áreas na projeção mantém uma relação constante com o valor de área da figura representada. Em termos das PQFG deve existir a seguinte igualdade:

$$\sqrt{eg - f^2} d\phi d\lambda = \sqrt{EG - F^2} d\phi d\lambda$$

Considerando que o valor de  $f$  para o elipsóide e para a esfera é igual a zero, então, para que haja equivalência na representação deve ocorrer:

$$eg = EG - F^2$$

O detalhamento do desenvolvimento das PQFG no contexto das projeções cartográficas pode ser encontrado em RICHARDUS & ADLER (1972) e em PEARSON (1990).

#### 2.4.2 Projeção Transversa de Mercator

A projeção Transversa de Mercator (TM) é uma representação conforme do elipsóide, e predomina sobre outros tipos de representações conformes utilizadas na Geodésia, com exceção das projeções conformes utilizadas para zonas polares, para as quais é utilizada a projeção estereográfica polar (BLACHUT *et al*, 1979, p. 42).

Segundo SNYDER (1987, p.48) a projeção TM foi desenvolvida por Johann Heinrich Lambert em 1772 como uma adaptação conforme da projeção Sinusoidal, e considera a esfera como superfície de referência. Entretanto Carl Friedrich Gauss analisou em 1822 a projeção com o elipsóide de revolução como superfície de referência. L. Krüger, em 1912 e em 1919, publicou o estudo da projeção aportando as fórmulas para o cálculo de coordenadas de projeção a partir de coordenadas sobre o elipsóide. Assim, a projeção TM é também conhecida como projeção Conforme de Gauss ou como projeção Gauss-Krüger.

A projeção TM apresenta a seguinte classificação, de acordo com BLACHUT *et al* (1979):

- Superfície de referência - o elipsóide de revolução ou a esfera
- Superfície de projeção - cilindro
- Posição da superfície de projeção - transversal
- Contato - tangente

- Geração - analítica
- Propriedade – conforme ( $m_\phi=m_\lambda=m$ )

Nestas condições, o Equador, o meridiano central e cada meridiano distante a  $90^\circ$  do meridiano central são apresentados como linhas retas. Outros meridianos e paralelos são apresentados como curvas complexas. Não há distorção de escala no meridiano central ( $m_0=1$ ), e a distorção de escala tende ao infinito para pontos situados a  $90^\circ$  de longitude do meridiano central.

Por ser de interesse neste trabalho, apresenta-se as funções que permitem o cálculo de coordenadas de projeção a partir das coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda$ ), distorção de escala e convergência meridiana, conforme BLACHUT et al. (1979). As fórmulas para o cálculo de outras quantidades podem ser consultadas em: SNYDER (1987), PEARSON (1990) e BLACHUT et al. (1979). Em alguns casos a notação foi adaptada em favor de manter uniformidade no contexto de cada trabalho. Neste trabalho o eixo  $x$  será orientado no sentido Leste e o eixo  $y$  no sentido Norte. Isto por razões práticas, e em especial para a uniformidade dos programas computacionais implementados.

Na seqüência são apresentadas as funções para o cálculo das coordenadas de projeção baseadas em BLACHUT et al. (1979):

$$\begin{aligned} x &= a_1 \Delta \lambda_{rad} + a_3 \Delta \lambda_{rad}^3 + a_5 \Delta \lambda_{rad}^5 \\ y &= B + a_2 \Delta \lambda_{rad}^2 + a_4 \Delta \lambda_{rad}^4 + a_6 \Delta \lambda_{rad}^6 \end{aligned} \quad (28)$$

Nesta expressão  $\Delta \lambda_{rad} = (\lambda - \lambda_0)_{rad}$  é a diferença em longitude do ponto de interesse ao meridiano central, medida em radianos, e  $B$  é o comprimento de arco de meridiano desde o Equador até a latitude  $\phi$ , dado por:

$$B = A_0 c \phi_{rad} - A_1 c \sin \phi \cos \phi (1 + A_2 \sin^2 \phi + A_4 \sin^4 \phi + A_6 \sin^6 \phi + A_8 \sin^8 \phi) \quad (29)$$

em que:

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 - \frac{3}{4} \epsilon'^2 \left\{ 1 - \frac{15}{16} \epsilon'^2 \left[ 1 - \frac{35}{36} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{63}{64} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{99}{100} \epsilon'^2 \right) \right) \right] \right\} \\
A_1 &= \frac{3}{4} \epsilon'^2 \left\{ 1 - \frac{25}{16} \epsilon'^2 \left[ 1 - \frac{77}{60} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{837}{704} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{2123}{1860} \epsilon'^2 \right) \right) \right] \right\} \\
A_2 &= \frac{5}{8} \epsilon'^2 \left[ 1 - \frac{139}{144} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{1087}{1112} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{513427}{521760} \epsilon'^2 \right) \right) \right] \\
A_4 &= \frac{35}{72} \epsilon'^4 \left( 1 - \frac{125}{64} \epsilon'^2 \left( 1 - \frac{221069}{150000} \epsilon'^2 \right) \right) \\
A_6 &= \frac{105}{256} \epsilon'^6 \left( 1 - \frac{1179}{400} \epsilon'^2 \right) \\
A_8 &= \frac{231}{640} \epsilon'^8 \\
c &= \frac{a^2}{b}
\end{aligned} \tag{30}$$

a quantidade  $\epsilon'^2$  é a segunda excentricidade do elipsóide ao quadrado dada em 2.2, expressão (5).

Os coeficientes  $a_i$  da expressão (28) são dados por:

$$\begin{aligned}
a_1 &= N \cos \phi \\
a_2 &= \frac{1}{2} a_1 \sin \phi \\
a_3 &= \frac{1}{6} a_1 (-1 + 2 \cos^2 \phi + \epsilon'^2 \cos^4 \phi) \\
a_4 &= \frac{1}{12} a_2 (-1 + 6 \cos^2 \phi + 9 \epsilon'^2 \cos^4 \phi + 4 \epsilon'^4 \cos^6 \phi) \\
a_5 &= \frac{1}{120} a_1 [1 - 20 \cos^2 \phi + (24 - 58 \epsilon'^2) \cos^4 \phi + 72 \epsilon'^2 \cos^6 \phi] \\
a_6 &= \frac{1}{360} a_2 (1 - 60 \cos^2 \phi + 120 \cos^4 \phi)
\end{aligned} \tag{31}$$

Para o cálculo de coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda)$ , a partir de coordenadas de projeção  $(x, y)$ , utilizam-se as seguintes funções baseadas em BLACHUT et al. (1979):

$$\begin{aligned}
\phi_{rad} &= \phi_{1rad} + b_2 y^2 + b_4 y^4 + b_6 y^6 \\
\lambda_{rad} &= \lambda_{0rad} + b_1 y + b_3 y^3 + b_5 y^5
\end{aligned} \tag{32}$$

em que  $\lambda_{0rad}$  é a longitude do meridiano central em radianos,  $\phi_{1rad}$  é a latitude, em



radianos, correspondente ao ponto do meridiano central donde o comprimento de arco de meridiano, desde o Equador até a latitude  $\phi_{l \text{ rad}}$ , é igual ao valor da coordenada de projeção

$x$ . Os coeficientes

$$\begin{aligned}
 b_1 &= c^{-1} \left[ \left( \frac{1}{\cos \phi_1} \right)^2 + \epsilon'^2 \right]^{1/2} \\
 b_2 &= -\frac{1}{2} b_1^2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 (1 + \epsilon'^2 \cos^2 \phi_1) \\
 b_3 &= -\frac{1}{6} b_1^3 (2 - \cos^2 \phi_1 + \epsilon'^2 \cos^4 \phi_1) \\
 b_4 &= -\frac{1}{12} b_1^2 b_2 [3 + (2 - 9\epsilon'^2) \cos^2 \phi_1 + 10\epsilon'^2 \cos^4 \phi_1 - 4\epsilon'^4 \cos^6 \phi_1] \\
 b_5 &= \frac{1}{120} b_1^5 [24 - 20 \cos^2 \phi_1 + (1 + 8\epsilon'^2) \cos^4 \phi_1 - 2\epsilon'^2 \cos^6 \phi_1]
 \end{aligned} \tag{33}$$

são funções da latitude  $\phi_l$ . O valor da latitude  $\phi_l$  pode ser calculada por aproximações sucessivas  $\phi_{(1)}$ ,  $\phi_{(2)}$ , ...,  $\phi_{(n)}$ ,

$$\begin{aligned}
 \phi_{(1) \text{ rad}} &= \frac{x}{A_0 c} \\
 \phi_{(2) \text{ rad}} &= \phi_{(1) \text{ rad}} + \frac{x - B_{(1)}}{A_0 c} \\
 &\vdots \\
 \phi_{(n) \text{ rad}} &= \phi_{(n-1) \text{ rad}} + \frac{x - B_{(n-1)}}{A_0 c}
 \end{aligned} \tag{34}$$

$\phi_l = \phi_{(n)}$ , quando  $B_n = x$ .

Os valores de  $B_{(1)}$ , ...,  $B_{(n-1)}$  são calculados para as latitudes  $\phi_{(1)}$ , ...,  $\phi_{(n-1)}$  com a expressão 26, respectivamente.

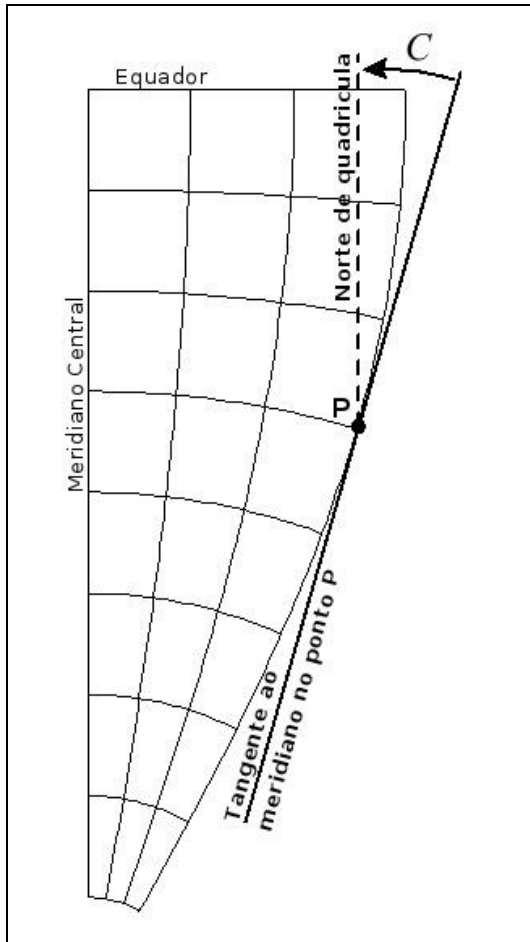
A distorção de escala  $m$  é dada por:

$$m = 1 + a_8 \Delta \lambda_{\text{rad}}^2 + a_{10} \Delta \lambda_{\text{rad}}^4 \tag{35}$$

em que os coeficientes  $a_i$  são dados por:

$$a_8 = \frac{1}{2} \cos^2 \phi (1 + \epsilon'^2 \phi) \tag{36}$$

$$a_{10} = \frac{1}{24} \cos^2 \phi [-4 + (9 - 28\epsilon'^2) \cos^2 \phi + 42\epsilon'^2 \cos^4 \phi]$$

FIGURA 6 - CONVERGÊNCIA MERIDIANA  $C$ 

A direção do eixo  $y$  define a direção do norte de quadrícula TM. Com exceção de pontos localizados no Equador e no meridiano central da projeção, o norte de quadrícula difere do norte geográfico. O ângulo entre a direção do norte de quadrícula e o norte dado pela direção do meridiano é chamado de convergência meridiana ( $C$ ). Este ângulo é medido desde a tangente ao meridiano no ponto até a direção do norte de quadrícula, com sinal positivo no sentido horário (Figura 6).

A fórmula para o cálculo da convergência meridiana  $C$  e dada por:

$$C = a_7 \Delta \lambda_{rad} + a_9 \Delta \lambda_{rad}^3 + a_{11} \Delta \lambda_{rad}^5 \quad (37)$$

em que os coeficientes  $a_i$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_7 &= \sin \phi \\ a_9 &= \frac{1}{3} \sin \phi \cos^2 \phi (1 + 3\epsilon'^2 \cos^2 \phi + 2\epsilon'^4 \cos^4 \phi) \\ a_{11} &= \frac{1}{15} \sin \phi \cos^2 \phi (-1 + 3\cos^2 \phi + \dots) \end{aligned} \quad (38)$$

### 2.4.3 Sistema de projeção *Universal Transversa de Mercator*

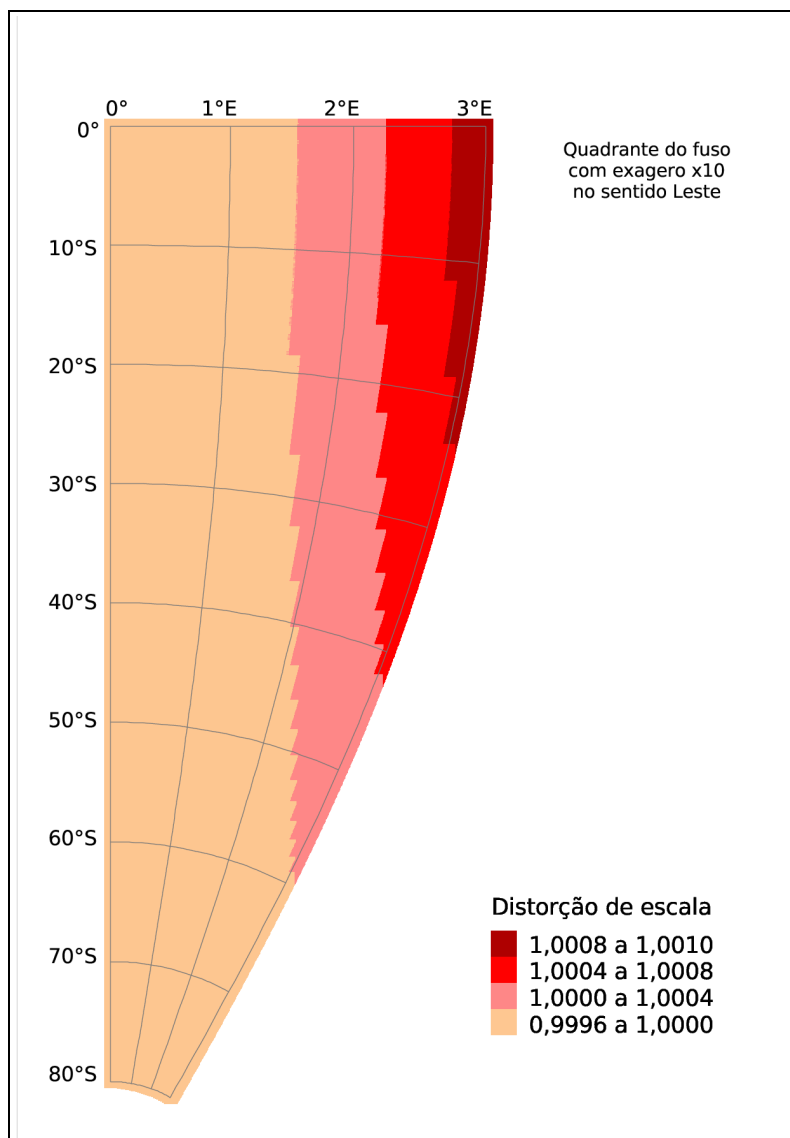
O sistema de projeção *Universal Transversa de Mercator* (UTM) é um sistema de projeção derivado da projeção Transversa de Mercator (TM) por especificação. O sistema UTM surgiu na década de 40 e foi desenvolvido pelo *U.S. Army*, como resposta à necessidade de uma projeção global para propósitos militares. Os requisitos para a projeção foram minimizar a distorção do valor de azimutes e manter a distorção de escala dentro de limites pré-estabelecidos (SMITH, 1996, p. 191). O sistema UTM foi adotado no Brasil desde 1956 como sistema de projeção do mapeamento sistemático.

O sistema apresenta as seguintes especificações, de acordo com RICHARDUS & ADLER (1972):

- A distorção de escala para os pontos situados no meridiano central é igual a 0,9996 ( $m_0=0,9996$ )
- Adota-se a convenção da Carta Internacional ao Milionésimo como definição de limite de fusos UTM. Portanto cada fuso tem 6° de amplitude em longitude, e seus meridianos centrais são múltiplos de 3°. Assim tem-se 60 fusos que enumeram-se de 1 a 60 a partir do antimeridiano de *Greenwich* para leste.
- O fuso UTM é limitado às latitudes 80°N e 80°S
- As coordenadas de projeção UTM são denominadas Norte (N) e Este (E) e são dadas em função das coordenadas TM como segue:
  - $E = X_{TM} * 0,9996 + 500.000m$
  - $N = Y_{TM} * 0,9996 + 10.000.000m$  (para o hemisfério sul)
  - $N = Y_{TM} * 0,9996$  (para o hemisfério norte)
- A distorção de escala para qualquer ponto é dada em função da distorção de escala da projeção TM ( $m_{UTM} = m_{TM} * 0,9996$ )
- A convergência meridiana não apresenta diferença em relação à fórmula da projeção TM ( $C_{UTM} = C_{TM}$ )

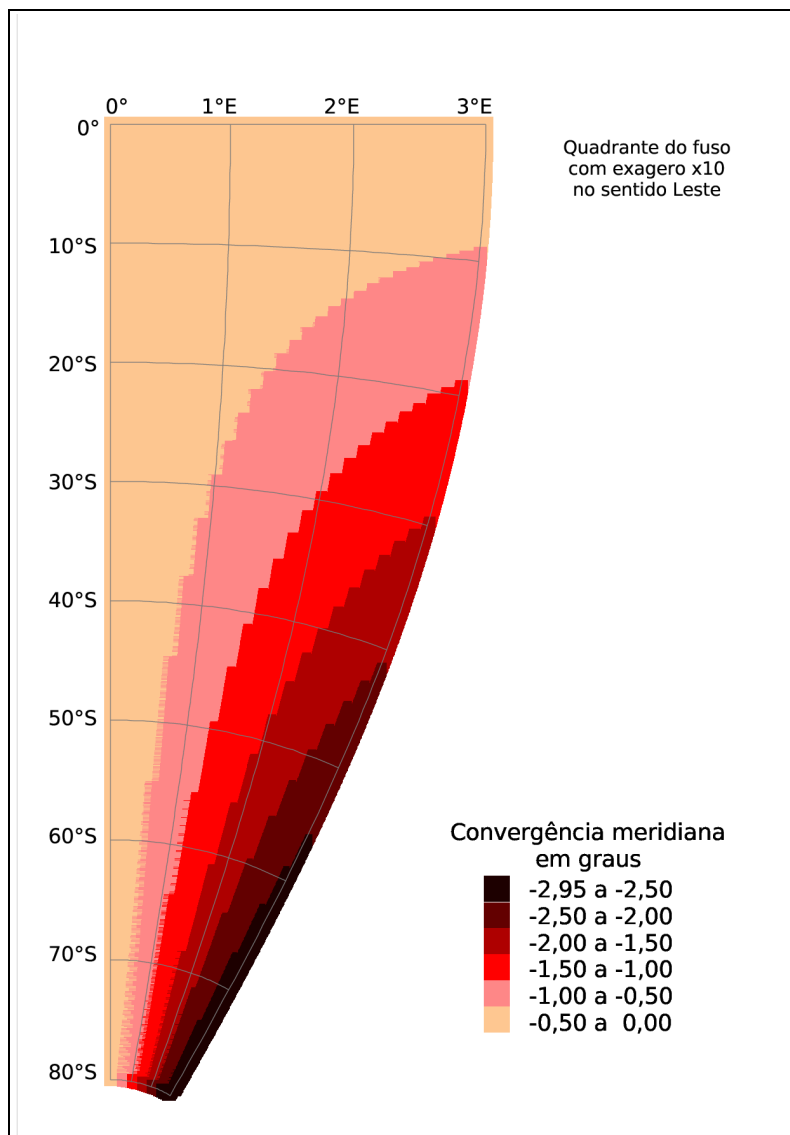
O comportamento do valor da distorção de escala em um fuso UTM pode ser observado na Figura 7. O valor que representa a distorção de escala aumenta diretamente com a distância ao meridiano central, isto é, um valor de distorção de escala de 0,9996 para pontos localizados no meridiano central, e valores maiores para pontos afastados do meridiano central. Assim, na faixa central do fuso UTM, próximo ao meridiano central, o valor de distorção de escala é menor de 1, e fora dela maior de 1. Portanto, o fuso UTM apresenta duas linhas sim distorção de escala, que corresponde às linhas limites desta faixa central.

FIGURA 7 – DISTORÇÃO DE ESCALA NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO UTM



O comportamento do valor da convergência meridiana pode ser observado na Figura 8. O valor da convergência meridiana, em valor absoluto, aumenta com a latitude e com a diferença em longitude ao meridiano central. O seja, pontos localizados nas proximidades do Equador (eixo x da projeção) e nas proximidades do meridiano central apresentam, em valor absoluto, magnitudes de convergência meridiana menores do que pontos localizados em latitudes altas e em longitudes extremas do fuso.

FIGURA 8 – CONVERGÊNCIA MERIDIANA NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO UTM



### 3 – METODOLOGIA

A mudança de SGR tem um impacto direto na geometria das feições presentes nas bases cartográficas em decorrência da variação dos valores de coordenadas geodésicas, e portanto das coordenadas de projeção. A metodologia proposta para a avaliação de um modelo de transformação bidimensional é dividida em duas partes:

1. avaliação do impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas, e
2. avaliação de modelos de transformação bidimensional.

#### 3.1 – AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA MUDANÇA DE REFERENCIAL GEODÉSICO NA GEOMETRIA DAS BASES CARTOGRÁFICAS

A avaliação do impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas se baseia na magnitude de variação das coordenadas de projeção, de quantidades derivadas de mensurações realizadas na projeção cartográfica, e na análises da tendência espacial destas quantidades sobre a superfície de projeção. As quantidades que pretende-se avaliar são:

- a) a magnitude das variações dos valores de coordenadas,
- b) a magnitude da variação da distorção de escala,
- c) a magnitude da variação da convergência meridiana, e
- d) a magnitude da variação angular entre direções mensuradas na projeção.

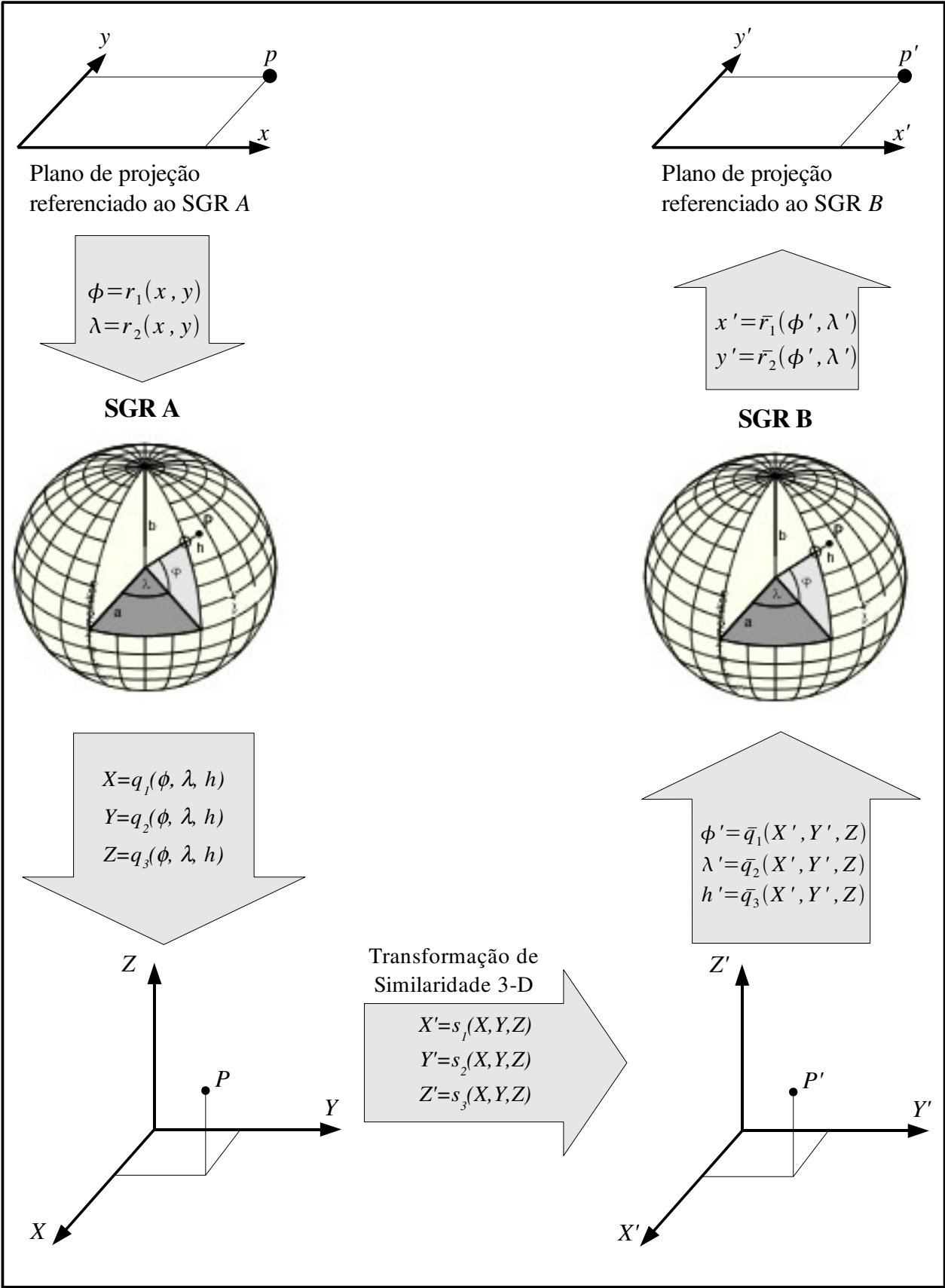
Para quantificar e analisar estas alterações geométricas são realizados testes de simulação da mudança de referencial geodésico para pontos dispersos homogeneamente numa zona de interesse. Para simular mudanças de referencial geodésico utiliza-se o modelo de Transformação de Similaridade no espaço 3-D por ser o modelo mais utilizado

atualmente em Geodésia para modelar a transformação de coordenadas entre referenciais geodésicos (ANCIÃES & OLIVEIRA, 2003, p. 91).

Considera-se para todos os testes que os dados originais e finais no processo de transformação são expressos em coordenadas de projeção, associados ao elipsóide de referência correspondente. Assim um conjunto de pontos, observados num plano de projeção referenciado num SGR *A*, são transformados num segundo conjunto de pontos projetados na mesma projeção cartográfica, mas associados a um SGR *B* (Figura 9).

Na Figura 9 apresenta-se a seqüência de cinco transformações de coordenadas utilizadas no primeiro grupo de testes. Os dados originais são um conjunto de coordenadas de projeção de pontos observados no plano de projeção referenciado no SGR *A*. Este conjunto de coordenadas é transformado em coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ) referidas ao elipsóide do SGR *A*, por meio das funções inversas  $r_1$  e  $r_2$  do sistema de projeção UTM, apresentadas em 2.4.2 (expressão 32). Na seqüência são transformadas as coordenadas geodésicas em coordenadas referidas ao SGC *XYZ* por meio funções  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , apresentadas em 2.2 (expressão 1). Para o valor da componente altimétrica ( $h$ ) foi imposto um valor igual a zero, assim determinou-se que os pontos observados no sistema *A* localizam-se na superfície do elipsóide de referência. O valor imposto não restringe as análises dos resultados só para situações em que a componente altimétrica é igual a zero, pois o deslocamento planimétrico das coordenadas transformadas devido a variação altimétrica não é significativa para propósitos cartográficos, como pode ser visto em ANCIÃES & OLIVEIRA (2003, p. 102).

FIGURA 9 - SEQUÊNCIA DE TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS REFERIDAS A DISTINTOS SGR



FONTE: Adaptado de KNIPPERS & HENDRIKSE (2006)



Obtidas as coordenadas referenciadas no SGC  $XYZ$ , é aplicada a Transformação de Similaridade no espaço 3-D como apresentado em 2.3 (expressão 7). Uma vez aplicada a Transformação de Similaridade 3-D às coordenadas referidas ao SGC  $XYZ$ , tem-se um segundo conjunto de coordenadas referenciadas no SGC  $X'Y'Z'$ . Este segundo conjunto de coordenadas é transformado em coordenadas geodésicas ( $\phi'$ ,  $\lambda'$ ,  $h'$ ) através das funções  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ , como apresentado em 2.2 (expressão 4), e referenciados no SGR  $B$ . No passo seguinte, as coordenadas geodésicas referenciadas no SGR  $B$  são transformadas em coordenadas de projeção através das funções  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ , como apresentadas em 2.4.2 (expressão 28). Finalmente, são avaliadas nos planos de projeção e para pontos homólogos, as magnitudes de deslocamento aparente do ponto, de variação da distorção de escala, da variação da convergência meridiana, e da variação angular entre duas direções homólogas.

Foram realizados nove testes. Os oito primeiros para avaliar o impacto de cada parâmetro do modelo de Transformação de Similaridade 3-D e da mudança de elipsóide na magnitude de variação dos valores de coordenadas de projeção, da variação da convergência meridiana e da distorção de escala. O nono teste foi realizado para avaliar o impacto do modelo de Transformação de Similaridade 3-D, com todos seus parâmetros distintos de zero e entre elipsóides distintos, nas magnitudes da variação dos valores de coordenadas de projeção, da convergência meridiana, da distorção de escala, e de ângulos mensurados na projeção. Para avaliar esta última magnitude foi considerado um ângulo ortogonal com orientação coincidente com a grade UTM, e observado entre as direções a pontos distanciados em 5.000 metros. Assim, as coordenadas de projeção dos três pontos que formam o ângulo na projeção são transformadas em coordenadas de projeção referenciadas no outro SGR. Logo é calculado o novo ângulo na projeção a partir das novas coordenadas de projeção e comparado com o ângulo original.

Para avaliar isoladamente cada parâmetro do modelo de Transformação de Similaridade 3-D, é imposto um valor distinto de zero para o parâmetro avaliado e iguais a zero para os parâmetros não avaliados em cada teste. Para a avaliação da mudança de elipsóide, é imposto um valor igual a zero para todos os parâmetros de transformação.

Somente são consideradas no processo elipsóides distintos para o SGR A e SGR B. No último teste, aplicado para avaliar o impacto de todos os parâmetros e mudança de elipsóide em conjunto, são impostos valores distintos de zero para todos os parâmetros do modelo de transformação e elipsóides distintos para o SGR A e SGR B. Os parâmetros e elipsóides usados nos testes são apresentados na Tabela 2.

TABELA 2 – PARÂMETROS E ELIPSÓIDES USADOS NOS TESTES E MAGNITUDES AVALIADAS

Testes	Parâmetros							Elipsóide		Magnitude avaliada			
	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$	$\delta m$	Elipsóide A	Elipsóide B	$d$	$\Delta m$	$\Delta C$	$\Delta \alpha$
1	200 m	0	0	0	0	0	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
2	0	200 m	0	0	0	0	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
3	0	0	200 m	0	0	0	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
4	0	0	0	-1"	0	0	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
5	0	0	0	0	1"	0	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
6	0	0	0	0	0	-1"	0	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
7	0	0	0	0	0	0	1 ppm	GRS80	GRS80	✓	✓	✓	
8	0	0	0	0	0	0	0	Hayford	GRS80	✓	✓	✓	
9	200 m	200 m	200 m	-1"	1"	-1"	1 ppm	Hayford	GRS80	✓	✓	✓	✓

$d$ : deslocamento aparente dos pontos

$\Delta m$ : variação da distorção de escala

$\Delta C$ : variação da convergência meridiana

$\Delta \alpha$ : variação do ângulo mensurado na projeção

TABELA 3 – PARÂMETROS DOS ELIPSÓIDES UTILIZADOS NOS SGR's OFICIAIS NO BRASIL

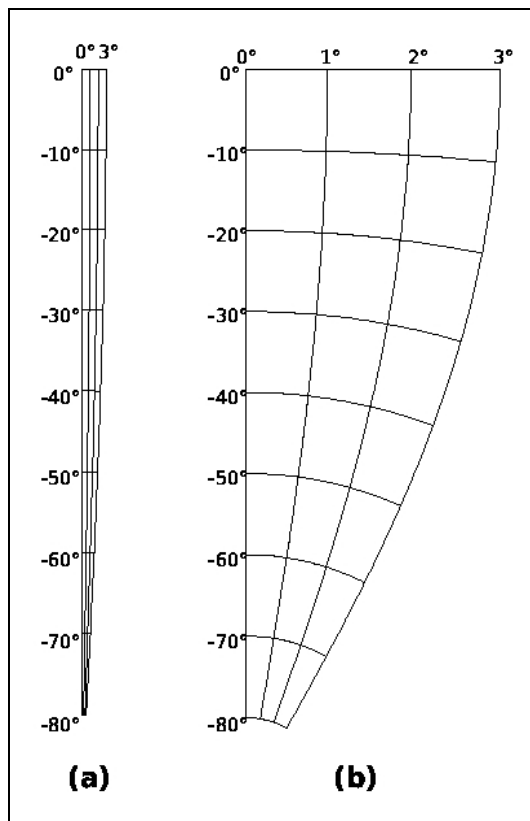
SGR	elipsoide	semi-eixo maior ( a )	achatamento ( f )
Corrego Alegre	Hayford	6.378.388 m	1/297
SAD69	Internacional 1967	6.378.160 m	1/298,247167427 aproximado para o valor 1/298,25
SIRGAS2000	GRS80	6.378.137 m	1/298,257222101

Os valores dos parâmetros do modelo da Transformação de Similaridade 3-D, assim como os elipsóides escolhidos na realização dos testes, foram determinados de modo a

retratar uma situação extrema de transformação no contexto nacional. Parâmetros do modelo de Transformação de Similaridade 3-D aplicados entre diversos SGR foram observados em CASTAÑEDA (1986, p. 111), para a transformação entre o SAD69 e o NSWC9Z2; COSTA, S M. A. (1999, p. 106) e CASTRO et al (2001, p. 75), para a transformação entre o SAD69 e o SIRGAS; e DALAZOANA (2001, p. 76-79), para a transformação entre o Córrego Alegre e o SAD69. Nos quatro primeiros, os valores de parâmetros observados apresentam magnitudes, em valores absolutos, inferiores aos impostos neste trabalho. No último, apresentam-se alguns valores de parâmetros maiores aos apresentados na Tabela 2, mas os valores são compensados com os outros valores de parâmetros, o que resulta finalmente em um deslocamento aparente dos pontos transformados inferior aos obtidos com os parâmetros e entre os elipsóides aqui propostos. O leitor pode observar na Tabela 2 que no caso das rotações são utilizados valores de  $-1''$ ,  $1''$  e  $-1''$  para  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  respectivamente. A conjugação do sinal algébrico é intencional para evitar a compensação com as componentes  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  no resultado da transformação.

Para ser possível observar tendências espaciais é necessário que os pontos observados sejam distribuídos homoganeamente no campo da projeção, e com a suficiente frequência para permitir a construção de mapas de análises. No caso do sistema UTM o campo da projeção é o fuso UTM, mas devido ao fuso apresentar simetria com respeito ao Equador e ao meridiano central, só foi necessário o estudo de um de seus quadrantes para inferir a situação no fuso completo. A frequência dos pontos é estimada em 0.1 grau em latitude e em longitude em decorrência da escala de representação dos mapas de análises ser de 1:70.000.000. Em razão de que quadrante de fuso UTM uma das dimensões ser aproximadamente 27 vezes maior que a outra ( $3^\circ$  em longitude por  $80^\circ$  em latitude) é necessário introduzir exagero na escala horizontal (Leste-Oeste). Aplicou-se um exagero em escala de 10 vezes na direção Leste-Oeste em relação à escala na direção Norte-Sul. Na Figura 10 apresenta-se o quadrante Sudeste de um fuso com a mesma escala em ambas direções (a) e com escala na direção Leste-Oeste exagerada em 10 vezes (b).

FIGURA 10 - QUADRANTE SUDESTE DE UM FUSO UTM



(a) quadrante sem exagero de escala (b) quadrante com exagero de escala 10 vezes no sentido Leste

Os resultados das análises dos testes serão verdadeiros somente para o fuso avaliado, pois a posição do fuso com respeito ao terno  $(X,Y,Z)$  do sistema geodésico cartesiano (SGC) influi nas magnitudes das quantidades estudadas. Por exemplo, consideremos um sistemas de fusos genéricos, com meridiano central em qualquer posição e não necessariamente em meridianos múltiplos de  $3^\circ$ , como é o caso dos fusos UTM. Assim, para um fuso com meridiano central contido no plano  $XZ$  do SGC ou na sua proximidade, uma translação em  $Y$  aplicada no SGC terá um impacto nas coordenadas de projeção diferente a de um outro fuso com meridiano central afastado do primeiro, por exemplo, de um fuso com meridiano central contido no plano  $YZ$  do SGC ou na sua proximidade. Não obstante, os fusos apresentam um posicionamento em torno do círculo equatorial contido no plano  $XY$  do SGC, e assim, magnitudes extremas no deslocamento das coordenadas de projeção advindas de uma translação em  $X$  ou em  $Y$  podem ser observados toda vez que o meridiano central do fuso estiver contido no plano  $XZ$  ou no plano  $YZ$  do SGC, é dizer, toda vez que o plano de projeção do fuso é perpendicular ou

paralelo à direção da translação.

Na Figura 11 apresentam-se dois fusos genéricos afastados em 90 graus em longitude. O primeiro com meridiano central do plano de projeção contido no plano  $XZ$  do SGC e o segundo fuso com meridiano central contido no plano  $YZ$  do SGC. O terno  $(X',Y',Z')$  apresenta a nova posição do SGC  $(X,Y,Z)$  quando é aplicada uma translação negativa no eixo  $Y$ . Os eixos cartesianos  $(x'_A, y'_A)$  e  $(x'_B, y'_B)$  apresentam os eixos coordenados dos planos de projeção para os fusos  $A$  e  $B$  respectivamente. Pode-se deduzir da figura que uma translação negativa em  $Y$  aplicada ao SGC  $(X,Y,Z)$  terá, no fuso  $A$ , efeitos iguais aos efeitos observados no fuso  $B$  quando é aplicada uma translação de igual magnitude no eixo  $X$ , mas em sentido contrário (Figura 12). No caso de translações na direção do eixo  $Z$  do SGC o impacto nas coordenadas projetadas será igual para todos os fusos, devido a que todos os planos de projeção dos fusos são paralelos ao eixo  $Z$ .

FIGURA 11 - TRANSLAÇÃO NO EIXO  $Y$  DO SGC  $(XYZ)$  E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO  $(x'_A, y'_A)$  e  $(x'_B, y'_B)$

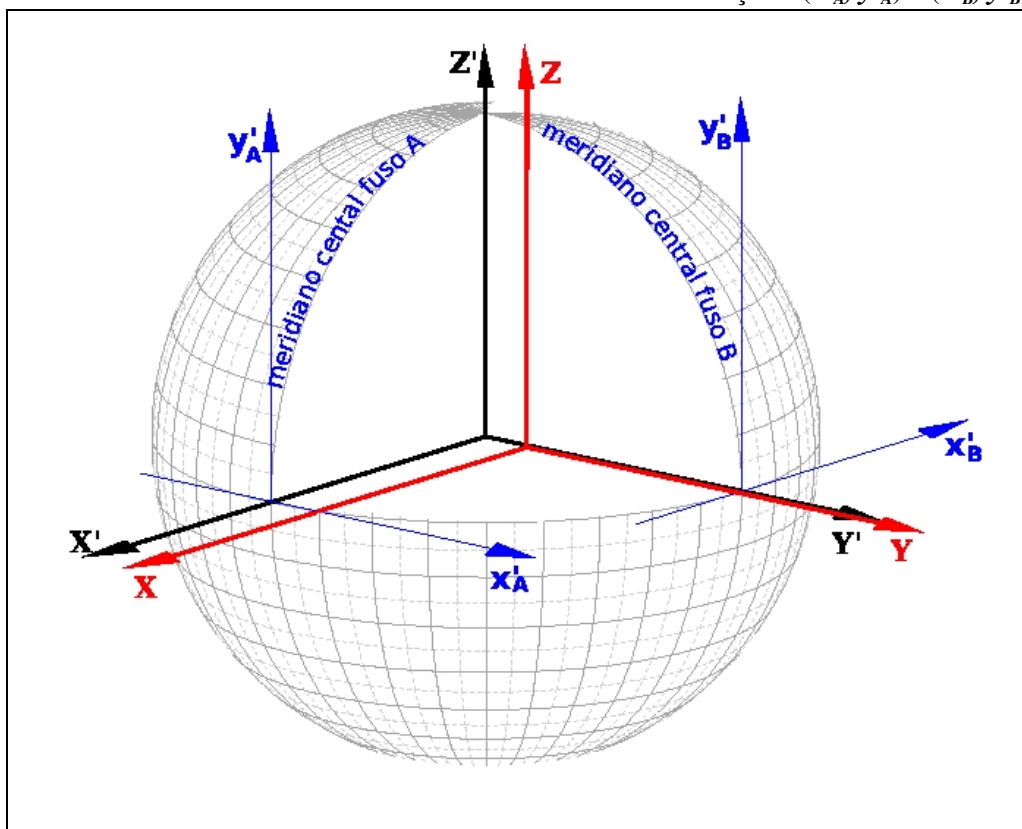
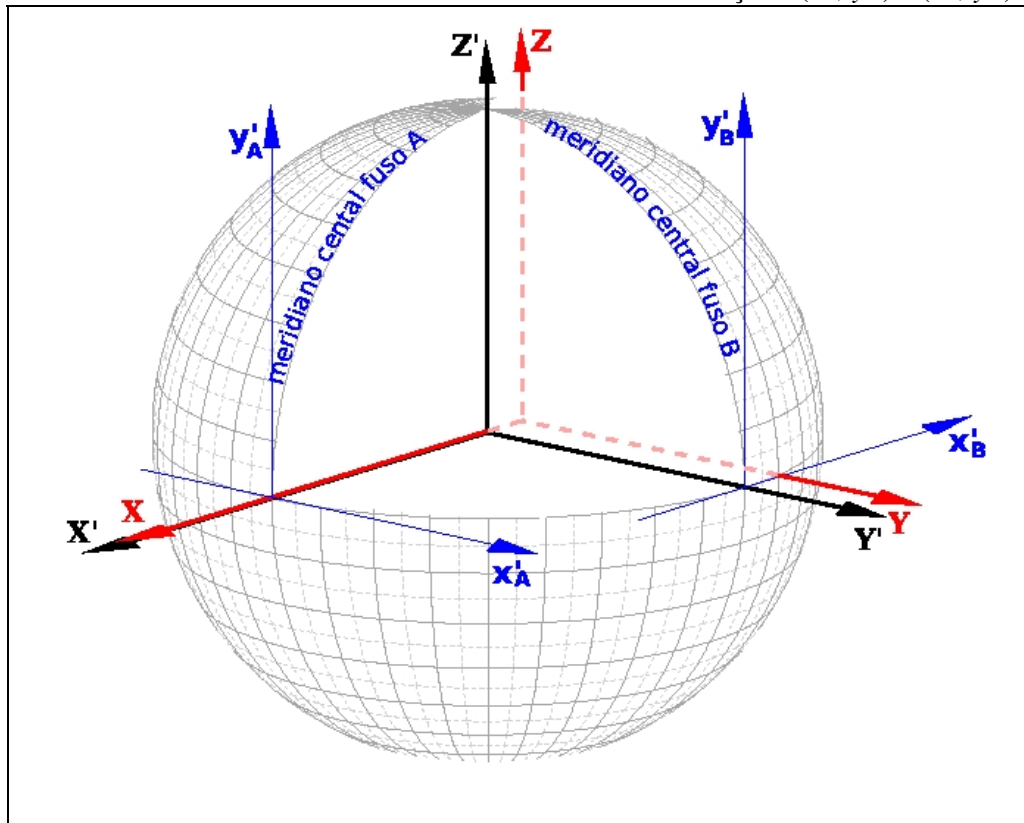


FIGURA 12 - TRANSLAÇÃO NO EIXO X DO SGC (X,Y,Z) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ )



No caso das rotações no SGC, uma rotação do eixo X ( $\omega_x$ ) terá um impacto nas coordenadas de projeção diferente para cada fuso. Fusos diametralmente opostos apresentaram um impacto de igual magnitude, mas em sentido contrário. Na Figura 13 pode-se observar que o impacto maior nas coordenadas de projeção para uma rotação do eixo X ( $\omega_x$ ) apresenta-se no fuso B, em decorrência que o fuso B acha-se numa distância máxima do eixo de rotação. A situação descrita é simétrica para o fuso diametralmente oposto ao fuso B. Para a mesma rotação  $\omega_x$ , qualquer outro fuso, exceto o fuso diametralmente oposto a B, terá um impacto nas coordenadas de projeção menor do que apresentado no fuso B. Assim também, uma rotação  $\omega_x$  terá efeitos no fuso A iguais aos efeitos no fuso B quando uma rotação, de igual magnitude mas em sentido contrário, é aplicada no eixo Y do SGC (Figura 14). No caso de rotações no eixo Z ( $\omega_z$ ) do SGC o impacto nas coordenadas projetadas será igual para todos os fusos, devido a que todos os planos de projeção dos fusos são paralelos ao eixo Z.

FIGURA 13 - ROTAÇÃO DO EIXO X ( $\omega_x$ ) DO SGC (X,Y,Z) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ )

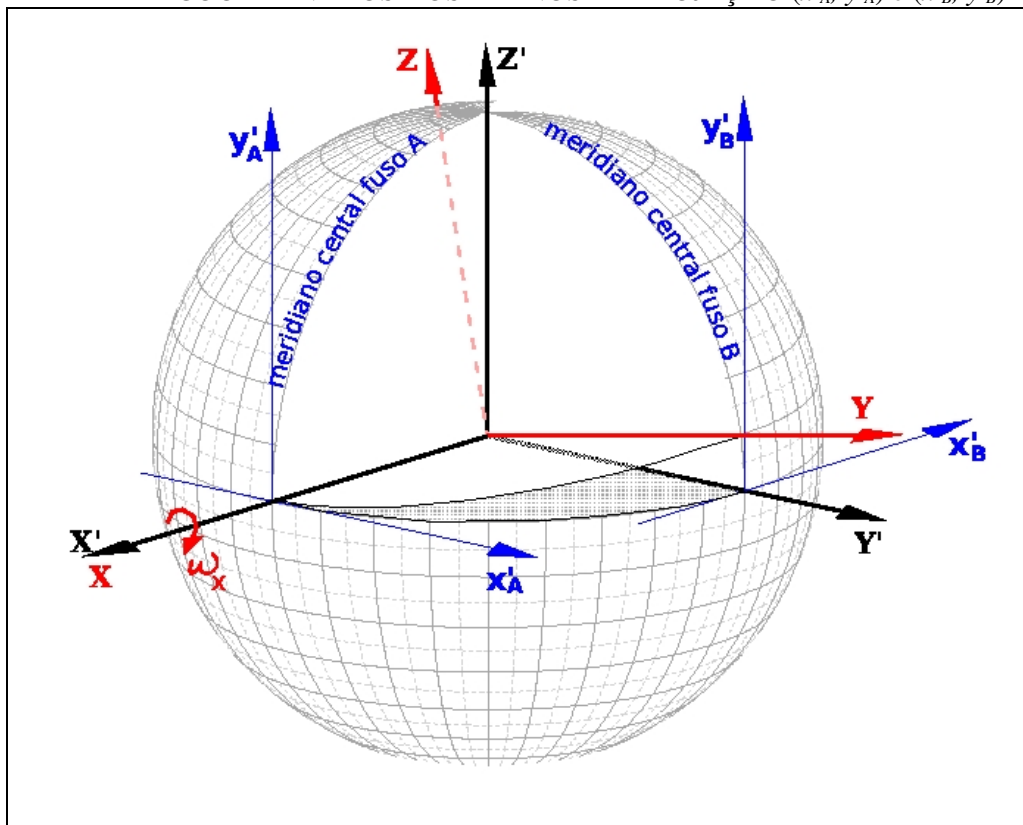
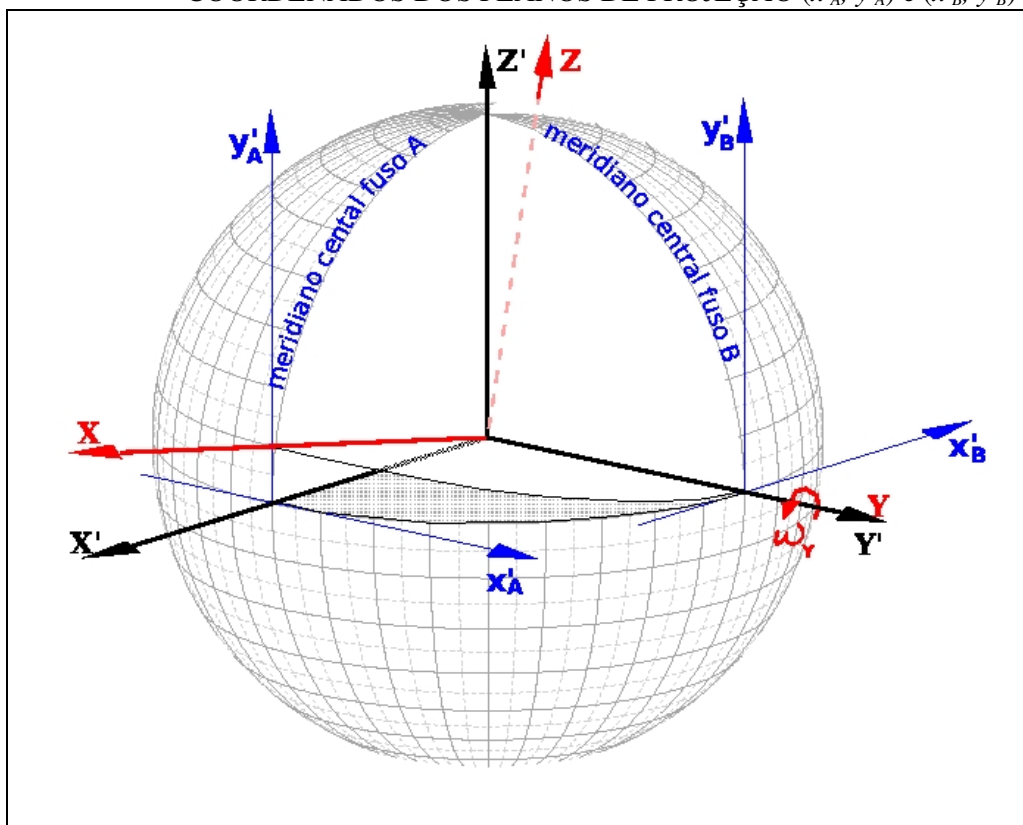


FIGURA 14 - ROTAÇÃO DO EIXO Y ( $\omega_y$ ) DO SGC (X,Y,Z) E RELAÇÃO POSICIONAL DOS EIXOS COORDENADOS DOS PLANOS DE PROJEÇÃO ( $x'_A, y'_A$ ) e ( $x'_B, y'_B$ )



Pode-se concluir que o estudo de um fuso com meridiano central contido no plano X'Z' ou Y'Z' será suficiente para inferir os efeitos nos restantes fusos. Os fusos UTM por especificação tem 6° de amplitude em longitude e os meridianos centrais destes fusos são múltiplos de 3°, portanto, para os testes e análises neste trabalho será definido um fuso particular com meridiano central 0° e nomeado de Fuso-0.



### 3.2 – AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO BIDIMENSIONAL

Para a avaliação de modelos de transformação bidimensional são realizados testes. Os testes são feitos para selecionar um modelo que permita, a partir de coordenadas bidimensionais, modelar uma mudança de referencial geodésico. Neste trabalho será considerado como modelo de melhor desempenho aquele que apresente, comparativamente, menores resíduos entre as coordenadas observadas no sistema B e as coordenadas calculadas a partir da aplicação do modelo de transformação bidimensional às coordenadas no sistema A. Assim também, um modelo de transformação bidimensional será considerado como apropriado para uma mudança de referencial geodésico, no contexto das bases cartográficas de escala 1:10.000, se apresentar resíduos menores ao erro-padrão planimétrico do Padrão de Exatidão Cartográfico (PEC) para produtos cartográficos classe A. O PEC planimétrico para produtos classe A é de 0,5 mm na escala nominal com erro-padrão correspondente a 0,3mm (CONCAR, 2007). Assim, resíduos iguais ou menores a 2 metros podem ser considerados não significativos na escala 1:10.000, uma vez que estes resíduos são absorvidos pela escala de representação do produto cartográfico.

Foram escolhidos cinco modelos de transformação bidimensional para avaliar e selecionar, entre eles, o modelo bidimensional que permita melhor modelar a mudança de referencial geodésico. Quatro modelos estão de acordo com a classificação para transformações geométricas dada por LUGNANI (1987): o modelo de Transformação Afim, o modelo de Transformação de Similaridade, o modelo de Transformação Projetiva e o modelo de Transformação Polinomial; todos aplicados no espaço bidimensional dos planos de projeção. Um quinto modelo escolhido é baseado na própria projeção Transversa de Mercator (TM) e apresentado por FEATHERSTONE et al., (1999). Este modelo consiste em uma projeção Transversa de Mercator Modificada (TMM). Este é uma projeção TM cujo valor dos parâmetros do meridiano central ( $\lambda_0$ ), do fator de escala da projeção ( $m_0$ ), do Falso Norte (FN) e do Falso Este (FE) são escolhidos tal que ao ser aplicada à projeção, as coordenadas das feições referenciadas num SGR A sejam similares

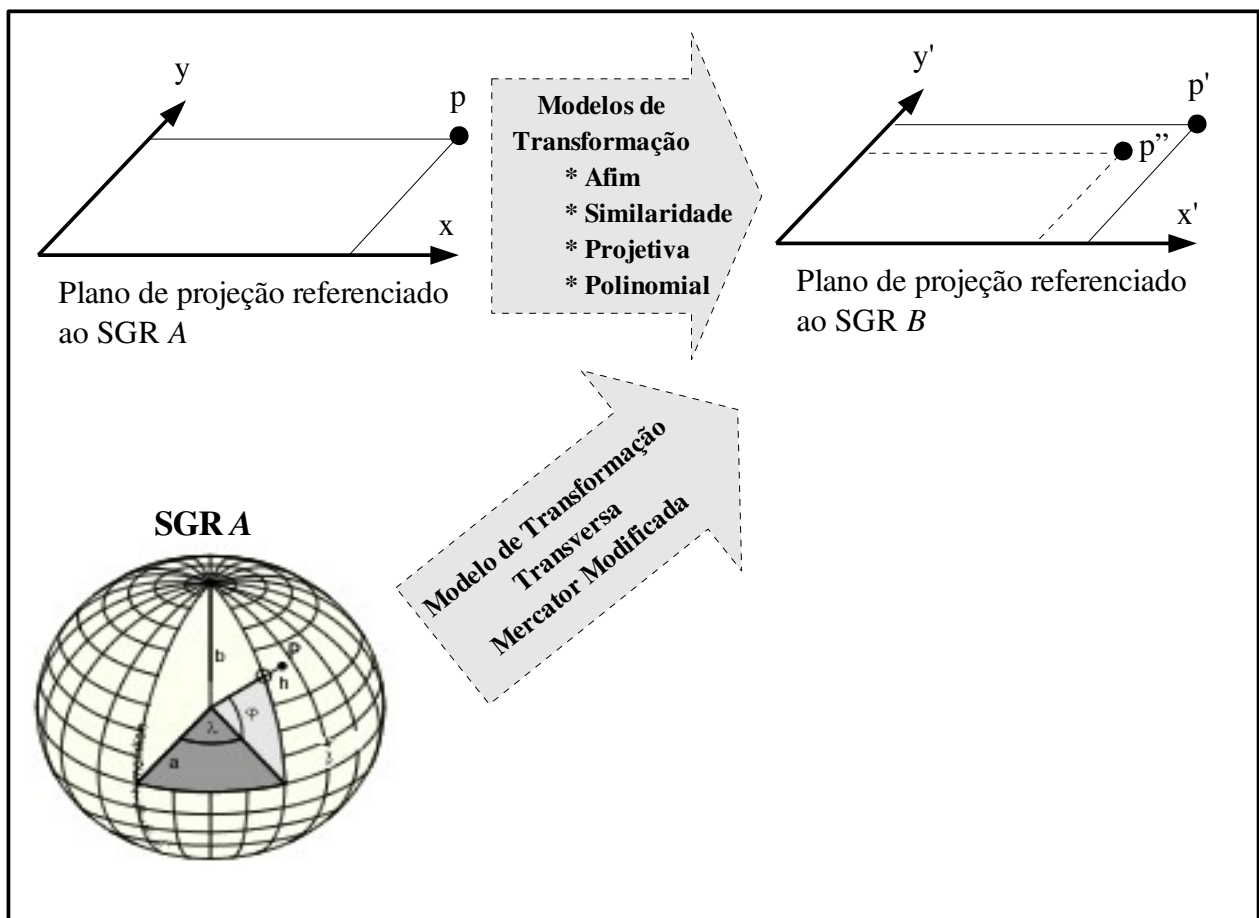
aos valores de coordenadas das mesmas feições quando referenciadas num SGR B e projetadas no fuso UTM correspondente. A abordagem, segundo os autores, é baseado na premissa dada por REIT em 1997 (apud FEATHERSTONE et al., 1999): *“Dado um SGR A e um sistema retangular plano num outro SGR B, é possível achar um conjunto de parâmetros de projeção (com base na mesma projeção do sistema retangular plano no SGR B) para definir um sistema plano no SGR A, o qual seja próximo do sistema retangular plano do SGR B”*.

Os testes com modelos de transformação bidimensional consistem na estimação de parâmetros de transformação, para cada modelo, a partir de um conjunto de coordenadas de pontos em ambos os sistemas de referência, e estimados em um processo de ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Os pontos utilizados são os mesmos pontos gerados para o teste 9 apresentado em 3.1 (Tabela 2). A avaliação é feita por meio da análise comparativa dos resíduos das coordenadas transformadas apresentados após o ajustamento para cada modelo bidimensional. Os resíduos são mapeados para se poder visualizar seu comportamento espacial no campo do fuso UTM. No método TMM, diferentemente dos outros modelos bidimensionais apresentados é que o conjunto de coordenadas do sistema A é expresso em coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ) e o conjunto de coordenadas dos pontos homólogos no sistema B são expressas em coordenadas de projeção ( $N$ ,  $E$ ). Por outro lado, ainda que os modelos sejam avaliados para o campo da projeção, isto é, para todo o fuso UTM, a aplicação de uma transformação no contexto das bases cartográficas de escala 1:10.000 é assumida para uma abrangência territorial máxima de 75 km x 75 km aproximadamente, em decorrência que o modelo tem como propósito declarado atender à cartografia urbana, e no Brasil as cidades tem uma extensão territorial menor que 75 km x 75 km. O valor de 75 km foi determinado a partir da região urbana do município de São Paulo, 75 km x 50 km aproximadamente (IBGE, 2005), e por conta de ser a cidade com maior superfície urbana no Brasil (MIRANDA, et al, 2005). Sendo assim, a análise e a avaliação final do modelo será feita sob o entendimento de que é aplicada para uma abrangência não superior à declarada. Para isto serão aplicados os testes a modelos de transformação bidimensional em uma região do quadrante do fuso,

nomeada região de teste, com extensão territorial de 75km x 75km aproximadamente. Esta região será localizada numa porção da superfície do quadrante do Fuso-0 que apresente a maior magnitude de variação angular entre direções mensuradas na projeção.

Deve-se considerar que, no presente trabalho, para a avaliação dos modelos de transformação bidimensional são utilizados dados sintéticos. Mas, na prática, os valores utilizados nas transformações têm erros associados, exatamente como decorre do PEC. Esta situação deve ser atendida toda vez que se realizar transformações com dados reais, e assim, poder estimar a precisão final da transformação. Por exemplo, na prática, tem-se pontos posicionados com alta precisão, como no SIRGAS2000, e vai-se produzir uma transformação desde uma base cartográfica de escala 1:10.000, referenciada em Córrego Alegre: Assim, deve-se considerar, por exemplo, no mínimo uma precisão relativa de 1:50.000, que para uma área de 75 km x 75 km implica 0,15 mm na escala da base cartográfica, mais os efeitos da transformação.

FIGURA 15 - RELACIONAMENTO DE SUPERFÍCIES NO PROCESSO DE AJUSTAMENTO



Na Figura 15 é mostrado o relacionamento entre superfícies cujos pontos observados são considerados para o ajustamento dos modelos bidimensionais. Os testes são aplicados para avaliar os modelos de transformação bidimensional que permitem relacionar os planos de projeção diretamente, de  $(x,y)$  para  $(x',y')$ , ou relacionar diretamente a superfície do elipsóide com o plano de projeção num outro Sistema Geodésico de Referência, ou seja, de  $(\phi,\lambda)$  para  $(x',y')$ . Comparando a Figura 15 com a Figura 9, apresentada em 3.1, constata-se que a aplicação de uma transformação bidimensional, entre os planos de projeção, requer um esforço computacional menor em comparação com o método que utiliza a Transformação de Similaridade 3-D, quando é aplicado a partir dos mesmos planos de projeção. A transformação bidimensional utiliza uma função de transformação, enquanto, o método da Transformação de Similaridade 3-D utiliza cinco.

Na Figura 15, o ponto  $p'$  representa o ponto cujas coordenadas  $(x',y')$  foram obtidas a partir da Transformação de Similaridade 3-D e consideradas, no processo de ajustamento, como valores observados no espaço  $B$ . Para os modelos de transformação bidimensional Afim, de Similaridade, Projetiva e Polinomial os valores de coordenadas do ponto  $p$  são considerados como valores observados no espaço  $A$ . No caso do modelo TMM os valores de coordenadas observadas no espaço  $A$  são os valores de coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda)$  no elipsóide do SGR  $A$ . O ponto  $p''$  representa o ponto cujas coordenadas foram calculadas através do modelo bidimensional avaliado e com os parâmetros obtidos no processo de ajustamento. No processo de ajustamento, as diferenças entre as coordenadas do ponto  $p''$  e do ponto  $p'$  são denominadas de resíduos.

### 3.2.1 Processo de ajustamento pelo MMQ na estimação de parâmetros de transformação

Na seqüência apresenta-se o desenvolvimento do processo de ajustamento pelo MMQ na estimação de parâmetros de transformação e os modelos matemáticos funcionais. O método de ajustamento utilizado para todos os modelos de transformação

bidimensional é o método dos parâmetros ou método de observações indiretas.

Para a realização dos ajustamento seguiu-se a seqüência:

- a) Obtenção do vetor das observações  $L_b$ , com valores de coordenadas  $x'$  e  $y'$ ;

$$L_b = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ y'_n \end{bmatrix}$$

- b) a matriz dos pesos das observações  $P$ , foi considerada identidade pois os valores de coordenadas observadas são valores sintéticos, considerados como equiprováveis;
- c) a matriz  $A$ , obtida a partir das derivadas das equações de observação em relação aos parâmetros;
- d) o vetor dos parâmetros:

- para modelo linear

$$X = (A^T P A)^{-1} (A^T P L_b)$$

- para modelos não linear

$$X = -(A^T P A)^{-1} (A^T P L)$$

em que  $L = L_0 - L_b$ , e  $L_0$  é o vetor numérico com o valor das coordenadas calculadas a partir de valores aproximados de parâmetros;

$$L_0 = \begin{bmatrix} x''_1 \\ y''_1 \\ \vdots \\ x''_n \\ y''_n \end{bmatrix}$$

- e) o vetor dos resíduos:

- para modelo linear

$$V = AX - L_b$$

- para modelo não linear

$$V = AX + (L_0 - L_b)$$

O desenvolvimento completo do método paramétrico pode ser consultado em GEMAEL (1994) e em DALMOLIN (2004).

### 3.2.1.1 Modelo de Transformação Afim 2-D

Neste modelo de transformação procura-se obter os 6 parâmetros da Transformação Afim 2-D aplicado entre os planos de projeção. Para uso do modelo matemático funcional, os valores de coordenadas UTM, em ambos os planos de projeção, foram transformados a valores de coordenadas  $x, y$  com origem do sistema no ponto central do fuso.

*Modelo matemático funcional*

$$x_B = a_1 x_A + b_1 y_A + c_1$$

$$y_B = a_2 x_A + b_2 y_A + c_2$$

em que:

$x_B, y_B$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço B;

$x_A, y_A$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço A; e

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  e  $c_2$  são os parâmetros de transformação.

*Matriz das derivadas parciais com respeito aos parâmetros*

$$A = \begin{bmatrix} x_A & 0 & y_A & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_A & 0 & y_A & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### 3.2.1.2 Modelo de Transformação de Similaridade 2-D

Neste modelo de transformação determinam-se os 4 parâmetros da Transformação de Similaridade 2-D aplicado entre os planos de projeção. Para uso do modelo matemático funcional, os valores de coordenadas UTM, em ambos planos de projeção, foram transformados para valores de coordenadas  $x, y$  com origem do sistema no ponto central do fuso.

*Modelo matemático funcional*

$$\begin{aligned}x_B &= a x_A + b y_A + c \\y_B &= -b x_A + a y_A + d\end{aligned}$$

em que:

$x_B, y_B$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço B;

$x_A, y_A$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço A; e

$a, b, c$  e  $d$  são os parâmetros de transformação.

*Matriz das derivadas parciais com respeito aos parâmetros*

$$A = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 & 0 \\ y_A & -x_A & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### 3.2.1.3 Modelo de Transformação Projetiva 2-D

Neste modelo de transformação determinam-se os 8 parâmetros da Transformação Projetiva 2-D aplicado entre os planos de projeção. Para uso do modelo matemático funcional, os valores de coordenadas UTM, em ambos os planos de projeção, foram transformados para valores de coordenadas  $x, y$  com origem do sistema no ponto central do fuso.

*Modelo Matemático Funcional*

$$\begin{aligned}x_B &= \frac{a_1 x_A + a_2 y_A + a_3}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1} \\y_B &= \frac{a_6 x_A + a_7 y_A + a_8}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}\end{aligned}$$

em que:

$x_B, y_B$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço B;

$x_A, y_A$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço A; e

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  e  $a_8$  são os parâmetros de transformação.

*Matriz das derivadas parciais com respeito aos parâmetros*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\delta x_B}{a_1} & \frac{\delta x_B}{\delta a_2} & \frac{\delta x_B}{\delta a_3} & \frac{\delta x_B}{\delta a_4} & \frac{\delta x_B}{\delta a_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta y_B}{\delta a_4} & \frac{\delta y_B}{\delta a_5} & \frac{\delta y_B}{\delta a_6} & \frac{\delta y_B}{\delta a_7} & \frac{\delta y_B}{\delta a_8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

em que:

$$\frac{\delta x_B}{\delta a_1} = \frac{x_A}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta a_2} = \frac{y_A}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta a_3} = \frac{1}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta a_4} = \frac{-x_A(a_1 x_A + a_2 y_A + a_3)}{(a_4 x_A + a_5 y_A + 1)^2}$$

$$\frac{\delta x_B}{\delta a_5} = \frac{-y_A(a_1 x_A + a_2 y_A + a_3)}{(a_4 x_A + a_5 y_A + 1)^2}$$

$$\frac{\delta y_B}{\delta a_4} = \frac{-x_A(a_6 x_A + a_7 y_A + a_8)}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta y_B}{\delta a_5} = \frac{-y_A(a_6 x_A + a_7 y_A + a_8)}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta y_B}{\delta a_6} = \frac{x_A}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta y_B}{\delta a_7} = \frac{y_A}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

$$\frac{\delta y_B}{\delta a_8} = \frac{1}{a_4 x_A + a_5 y_A + 1}$$

O modelo matemático funcional é não linear, portanto, os parâmetros serão obtidos mediante iterações, com início em um  $X_0$  arbitrário. No caso dos testes usou-se parâmetros iniciais com valor zero.



### 3.2.1.4 – Modelo de Transformação Polinomial 2-D (segundo grau)

Neste modelo de transformação determinam-se os 18 parâmetros da Transformação Polinomial 2-D de segundo grau, aplicado entre os planos de projeção. Para uso do modelo matemático funcional, os valores de coordenadas UTM, em ambos os planos de projeção, foram transformados em valores de coordenadas  $x, y$ , com origem do sistema no centróide das coordenadas dos pontos observados no sistema A.

#### *Modelo matemático funcional*

$$\begin{aligned}x_B &= a_0 + a_1 x_A + a_2 x_A^2 + a_3 y_A + a_4 x_A y_A + a_5 x_A^2 y_A + a_6 y_A^2 + a_7 x_A y_A^2 + a_8 x_A^2 y_A^2 \\y_B &= b_0 + b_1 x_A + b_2 x_A^2 + b_3 y_A + b_4 x_A y_A + b_5 x_A^2 y_A + b_6 y_A^2 + b_7 x_A y_A^2 + b_8 x_A^2 y_A^2\end{aligned}$$

em que:

$x_B, y_B$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço B;

$x_A, y_A$  são as coordenadas dos pontos observadas no espaço A; e

$a_0, a_1, \dots, a_8, b_0, b_1, \dots, b_8$  são os parâmetros de transformação.

#### *Matriz das derivadas parciais com respeito aos parâmetros*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_A & x_A^2 & y_A & x_A y_A & x_A^2 y_A & y_A^2 & x_A y_A^2 & x_A^2 y_A^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_A & x_A^2 & y_A & x_A y_A & x_A^2 y_A & y_A^2 & x_A y_A^2 & x_A^2 y_A^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### 3.2.1.5 – Modelo Transversa de Mercator Modificada (TMM)

Para este modelo de transformação determinam-se os parâmetros da projeção Transversa de Mercator Modificada (Falso Leste, Falso Norte, Meridiano Central e Fator de Escala), de modo que ao projetar os dados do Sistema A os valores das coordenadas de projeção sejam suficientemente próximos aos valores de coordenadas da projeção UTM dos pontos homólogos, observados no Sistema B.

### Modelo Matemático Funcional

$$E_{UTM} = FE + m_0 [a_1(\lambda - \lambda_0) + a_3(\lambda - \lambda_0)^3 + a_5(\lambda - \lambda_0)^5]$$

$$N_{UTM} = FN + m_0 [B + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + a_4(\lambda - \lambda_0)^4 + a_6(\lambda - \lambda_0)^6]$$

em que:

$E_{UTM}$  = valor da coordenada Leste na projeção UTM no Sistema B;

$N_{UTM}$  = valor da coordenada Norte na projeção UTM no Sistema B;

$FE$  = Falso Leste na projeção TM para o Sistema A;

$FN$  = Falso Norte na projeção TM para projetar o Sistema A no Sistema B;

$m_0$  = Fator de escala da projeção TM para projetar o Sistema A no Sistema B;

$\lambda_0$  = longitude central da projeção TM para projetar o Sistema A no Sistema B; e

$\lambda$  = longitude do ponto no Sistema A.

Os demais coeficientes são os coeficientes próprios da projeção TM descritos em 2.4.2.

### Matriz das derivadas parciais com respeito aos parâmetros

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a_1 k_0 - 3a_3 k_0 (\lambda_0 - \lambda)^2 - 5a_5 k_0 (\lambda_0 - \lambda)^4 & a_1(\lambda - \lambda_0) + a_3(\lambda - \lambda_0)^3 + a_5(\lambda - \lambda_0)^5 \\ 0 & 1 & 2a_2 k_0 (\lambda_0 - \lambda) + 4a_4 k_0 (\lambda_0 - \lambda)^3 + 6a_6 k_0 (\lambda_0 - \lambda)^5 & B + a_2(\lambda - \lambda_0)^2 + a_4(\lambda - \lambda_0)^4 + a_6(\lambda - \lambda_0)^6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

O modelo matemático funcional é não linear. Portanto, os parâmetros são obtidos mediante iterações, com início em um  $X_0$  arbitrário. No caso dos testes usou-se os parâmetros:

$$X_0 = [500.000 \quad 10.000.000 \quad 0^\circ \quad 1]^T$$

Todos os algoritmos para o processo de ajustamento previsto nos testes a modelos de transformação bidimensionais, assim como os algoritmos para transformar valores de coordenadas observadas no espaço  $A$  para valores de coordenadas no espaço  $B$  foram implementados na linguagem *Octave* (GNU *Octave*, version 2.1.71), uma linguagem de programação de alto nível destinada ao tratamento de problemas para computação numérica. Pode ser facilmente expandido e adaptado através de funções definidas pelo usuário, escritas na própria linguagem ou usando módulos dinamicamente carregados escritos em outras linguagens como C++, em C, e Fortran.

Para a análise visual dos resultados de todos os testes foram criadas figuras que representam o quadrante do Fuso-0 e as magnitudes avaliadas, com utilização do software ArcView 3.1, software orientado à visualização e gerenciamento de informação geográfica.

O deslocamento aparente de pontos, produto da variação de coordenadas em decorrência de uma mudança de referencial geodésico, foi representado por um símbolo pontual com variável visual tamanho e direção. O símbolo pontual utilizado é a forma gráfica de um vetor ou seta, cuja magnitude é proporcional à magnitude do deslocamento aparente do ponto avaliado e a sua direção corresponde à direção do deslocamento. O símbolo pontual foi aplicado para pontos situados a cada  $1^\circ$  de longitude e a cada  $10^\circ$  em latitude. Para representar as demais magnitudes avaliadas foi utilizado um símbolo de área e variável visual valor de cor em tons de cinza.

Deve-se ter em mente que a representação do quadrante do fuso foi exagerado, no sentido Leste em 10 vezes. No entanto, o símbolo pontual não foi afetado pelo exagero, isto é, a direção das setas indicam o azimute UTM do deslocamento aparente do ponto avaliado.

No processo de ajustamento para a avaliação dos modelos de transformação bidimensional os resíduos são a discrepância entre vetor calculado, a partir do modelo matemático funcional e dos parâmetros obtidos no ajustamento, e o vetor das observações  $L_b$ , isto é, a diferença entre valores de coordenadas transformadas através do modelo e seus parâmetros, e os valores de coordenadas observadas. Nos mapas de análises os resíduos

são considerados como a distância no plano de projeção entre os pontos cujas coordenadas foram calculadas e os pontos cujas coordenadas foram observadas.

## 4 EXPERIMENTOS

Na seqüência apresentam-se os resultados dos testes e análises para a avaliação do impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas, assim como para a avaliação de modelos de transformação bidimensional.

### 4.1 TESTES E ANÁLISES PARA AVALIAÇÃO DO IMPACTO DA MUDANÇA DE REFERENCIAL GEODÉSICO NA GEOMETRIA DAS BASES CARTOGRÁFICAS.

Para realizar os testes da avaliação do impacto da mudança de referencial geodésico na geometria das bases cartográficas foram estabelecidos os valores de parâmetros da Transformação de Similaridade 3-D (TS-3D) e a mudança de elipsóide conforme se apresentou na Tabela 2 do Capítulo 3.

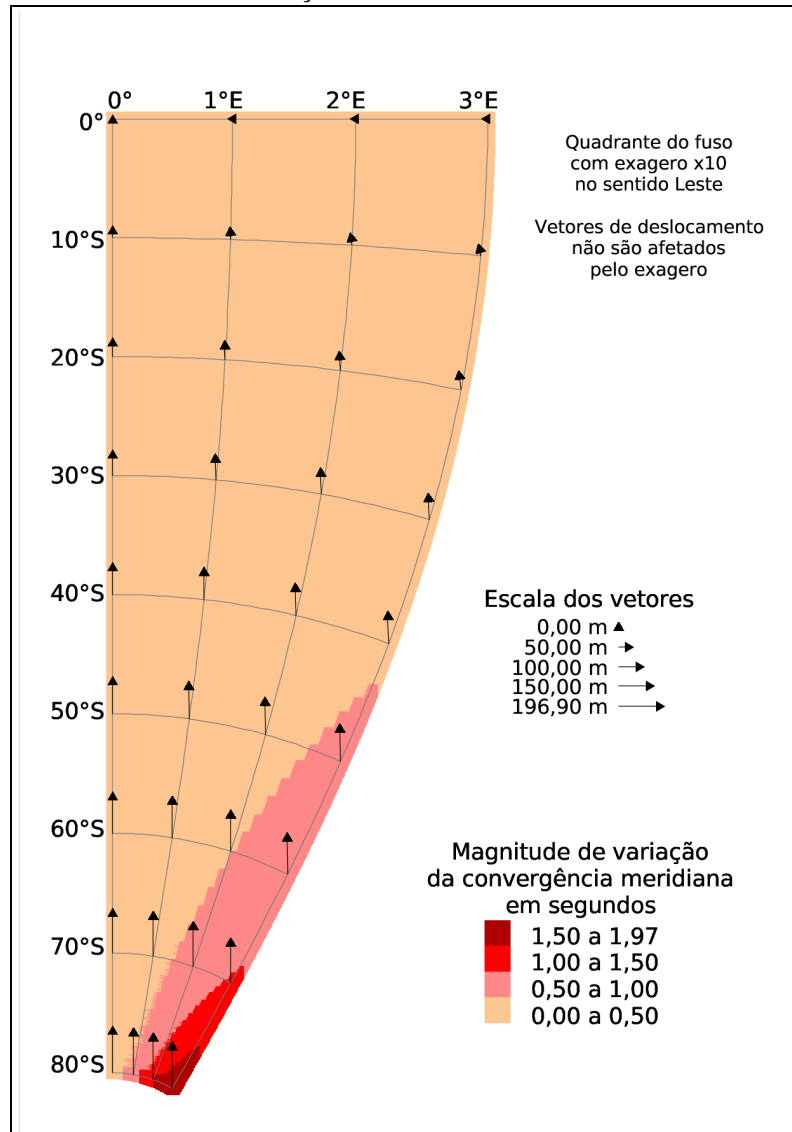
Em todos os testes a magnitude de variação da distorção de escala foi nula. Isto devido a que nos testes os deslocamentos apresentam todos valores inferiores à razão da variação distorção de escala. Sendo assim, a distorção de escala não foi representada em figuras.

#### 4.1.1 Teste 1 – Translação de 200m no eixo X do SGC

O teste 1 corresponde à aplicação de uma translação  $\Delta X$  de 200m na TS-3D. Na Figura 16 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se na figura que quase a totalidade da superfície do quadrante do fuso apresenta magnitude de variação da convergência meridiana inferior a 1" e maior parte desta é menor a 0,50". Esta situação deve-se principalmente ao deslocamento aparente dos pontos que é predominantemente em sentido das latitudes, enquanto o valor absoluto da convergência meridiana, no fuso UTM, aumenta predominantemente em relação ao aumento da longitude com respeito ao meridiano central da projeção (ver Figura 8). Observa-se, ademais, que os deslocamentos

aparentes dos pontos são menores em latitudes próximas ao Equador e maiores em latitudes altas. Ademais, todos os deslocamentos são em direção ao ponto central da projeção.

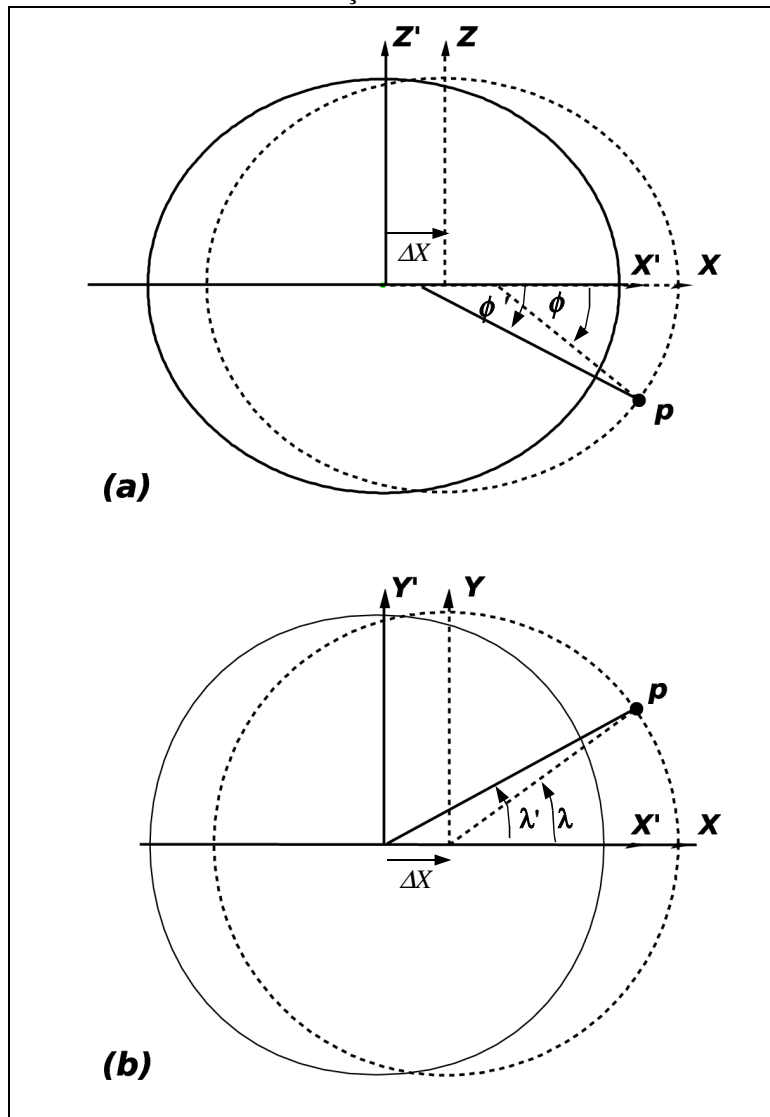
FIGURA 16 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA O  $\Delta X=200\text{m}$  NA TS-3D



A direção do deslocamento aparente dos pontos pode ser constatada na Figura 17. A figura apresenta uma vista ortogonal ao plano  $XZ$  do SGC, e uma vista ortogonal ao plano  $XY$  do SGC, ambos para uma translação  $\Delta X$  para a TS-3D. Com linha segmentada

apresenta-se o elipsóide e o SGC original ( $XYZ$ ) e com linha contínua o novo SGC ( $X'Y'Z'$ ) e o elipsóide nele referenciado.

FIGURA 17 - VISTA ORTOGONAL AO PLANO XZ E AO PLANO XY DO SGC PARA UMA TRANSLAÇÃO  $\Delta X$  NA TS- 3D



(a) vista ortogonal ao plano XZ do SGC (b) vista ortogonal ao plano XY do SGC

Uma translação  $\Delta X$  no TS-3D significa que o sistema original acha-se a uma distância  $\Delta X$  na direção do eixo  $X$  com respeito ao novo SGC. Assim, para o Teste 1, seja  $\phi$  a latitude do ponto  $p$  no quadrante Sudeste do Fuso-0 e

referenciado no SGC original, e  $\phi'$  a latitude do mesmo ponto  $p$  referenciado no novo SGC (Figura 17a ). O valor absoluto da latitude  $\phi'$  é menor que o valor absoluto da latitude  $\phi$ , em decorrência da distância do ponto  $p$  com respeito ao novo SGC ser maior. Esta situação gera um decréscimo do valor da componente  $y$  das coordenadas de projeção do ponto  $p$ . A situação é similar para a componente  $x$ . A longitude ao meridiano central ( $\lambda'$ ) do ponto  $p$  referenciada ao novo SGC apresenta um valor inferior que sua homóloga no sistema original ( $\lambda$ ) (Figura 17b ), fato que gera uma diminuição do valor da componente  $x$  nas coordenadas de projeção do ponto  $p$ . Ambas diminuições geram um deslocamento aparente do ponto  $p$  na direção do ponto central da projeção.

#### 4.1.2 Teste 2 - Translação de 200m no eixo $Y$ do SGC

O teste 2 corresponde à aplicação de uma translação  $\Delta Y$  de 200m na TS-3D. Na Figura 18 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se nesta figura que as magnitudes da variação da convergência meridiana são maiores do que as magnitudes observadas no teste anterior. Isto obedece ao fato de que o deslocamento dos pontos ocorrer na mesma direção do aumento da magnitude da convergência meridiana no fuso UTM apresentado no Capítulo 2 (Figura 8).

Observa-se na Figura 18 que a magnitude da variação da convergência meridiana aumenta com a latitude em decorrência de que, em latitudes maiores, os meridianos apresentam uma maior convergência. Assim, um mesmo valor de deslocamento na componente  $x$  nas coordenadas de projeção gera uma variação maior da magnitude da convergência meridiana nas latitudes altas e uma variação menor em latitudes próximas ao Equador. Observa-se, ademais, que o deslocamento aparente dos pontos é homogêneo em toda a superfície do quadrante do fuso, e no mesmo sentido da componente  $x$  das coordenadas de projeção. A orientação e sentido dos vetores de deslocamento pode ser constatada na Figura 19. Observa-se, nesta figura, a situação do ponto  $p$ , no quadrante



Sudeste do Fuso-0, quando é aplicada uma translação  $\Delta Y$  na TS-3D. O ponto  $p$ , referenciado no novo SGC, apresenta uma longitude ao meridiano central comparativamente maior à longitude ao meridiano central do mesmo ponto  $p$  quando é referenciada no SGC original. Esta situação gera deslocamentos no sentido da componente  $x'$  das coordenadas de projeção no Fuso-0.

FIGURA 18 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA  $\Delta Y=200\text{m}$  NA TS-3D

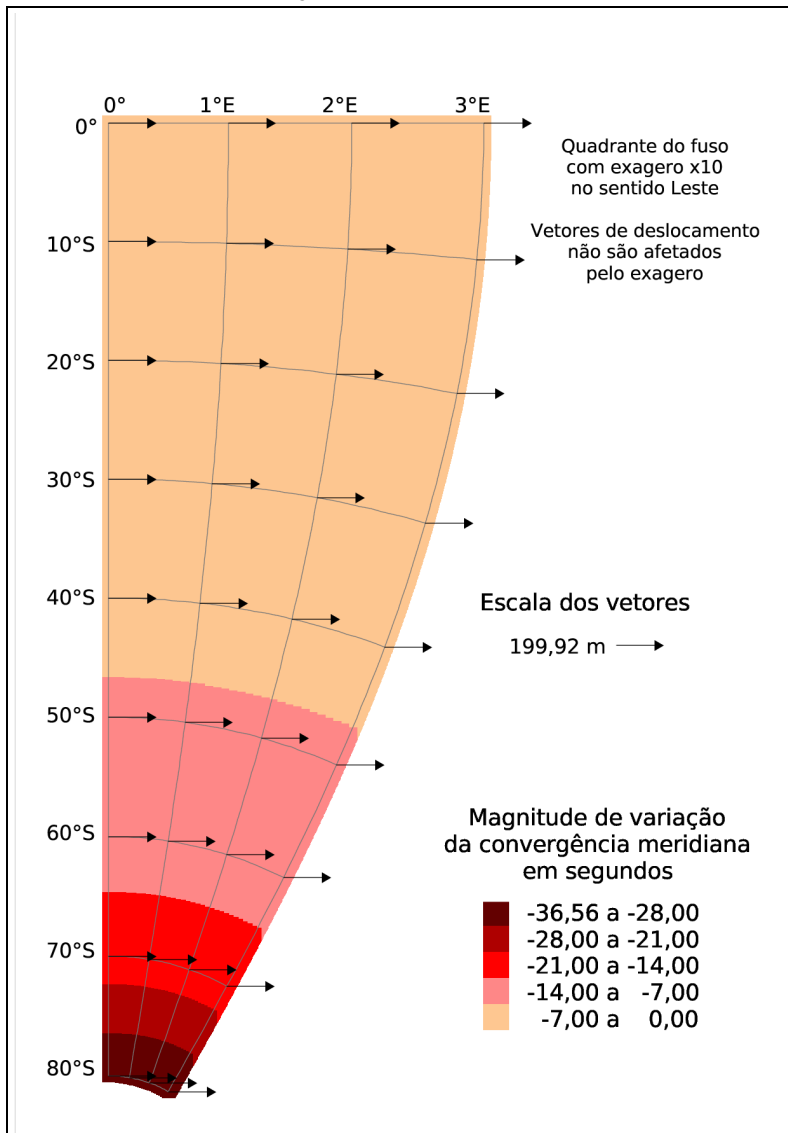
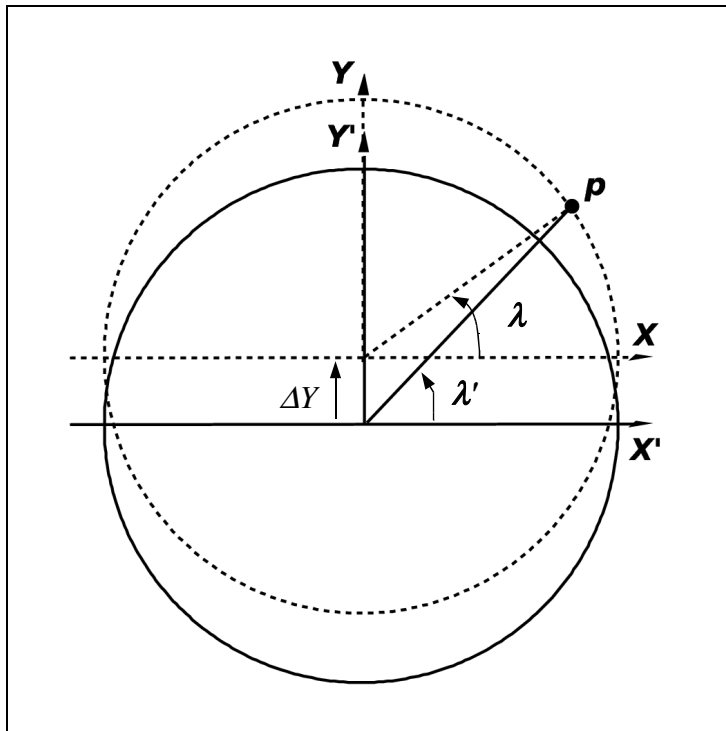


FIGURA 19 – SITUAÇÃO DE UM PONTO  $p$  PARA UMA TRANSLAÇÃO  $\Delta Y$  NA TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE 3-D

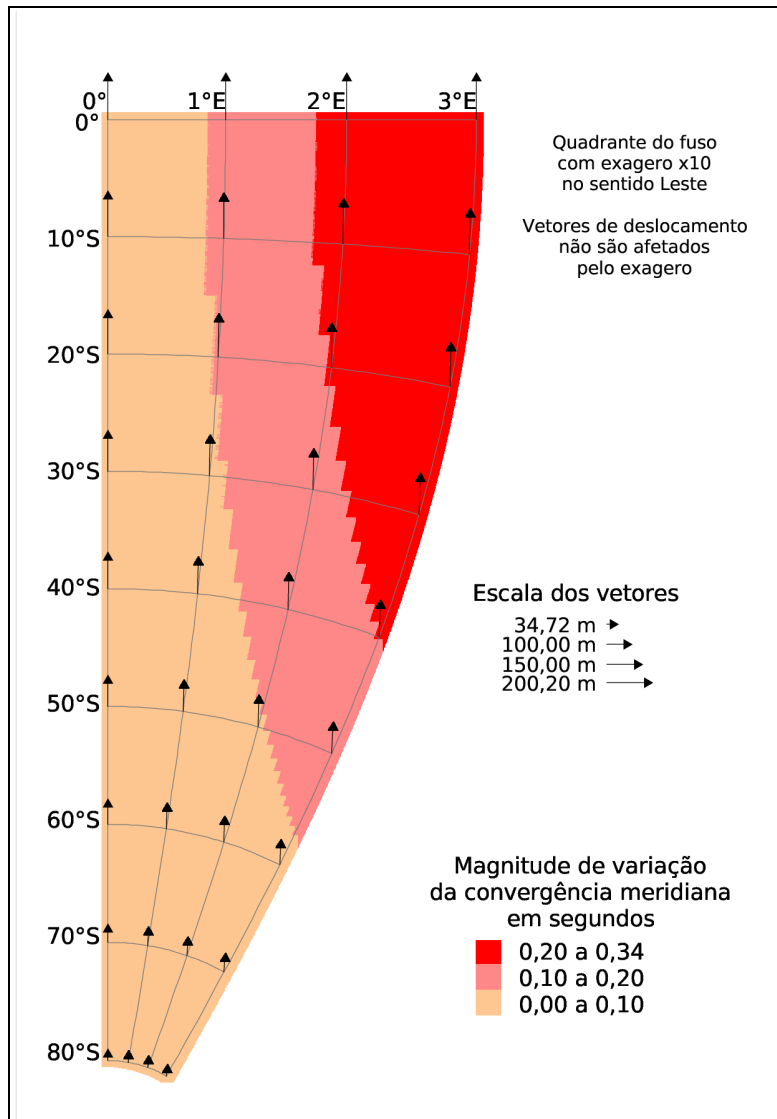


Vista ortogonal ao plano  $XY$  do SGC

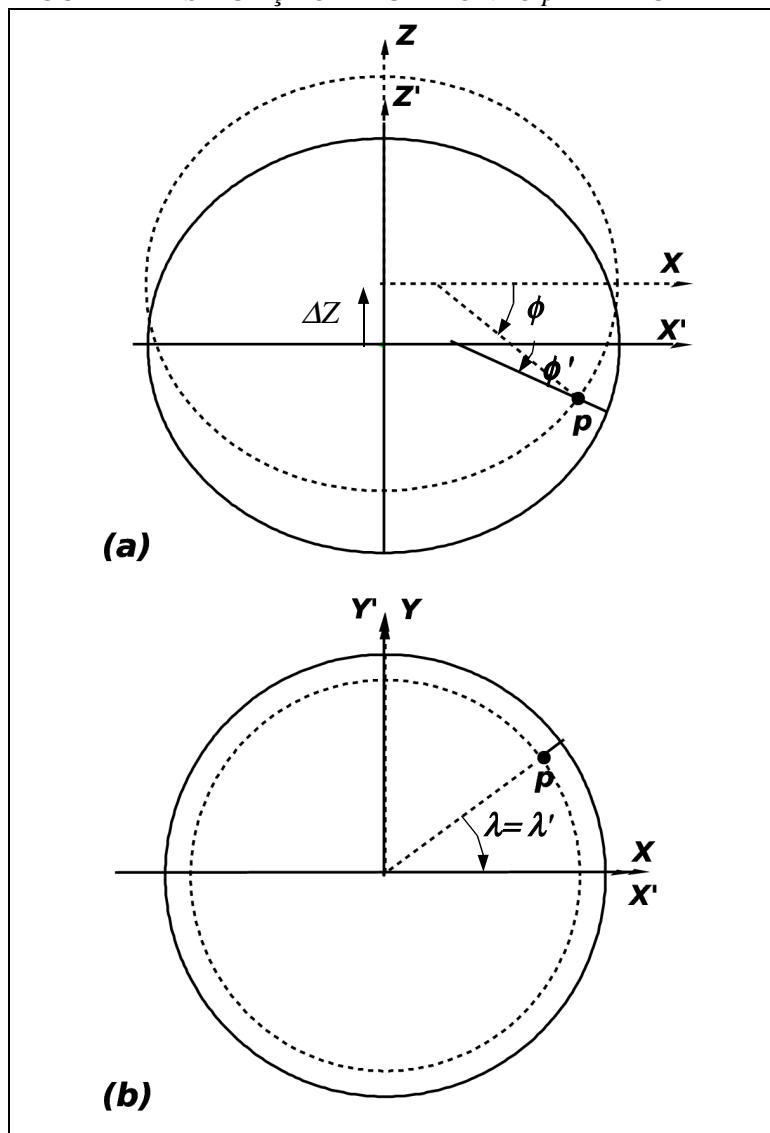
#### 4.1.3 Teste 3 - Translação de 200m no eixo Z do SGC

O teste 3 corresponde à aplicação de uma translação  $\Delta Z$  de 200m na TS-3D. Na Figura 20 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se na figura que as magnitudes da variação da convergência meridiana são inferiores ao Teste 2 e ainda ao Teste 1. Os valores pequenos para as magnitudes de variação da convergência meridiana decorre do fato de que os deslocamento maiores acontecem em latitudes próximas ao Equador, onde a convergência meridiana é menor, e os deslocamentos menores acontecem nas latitudes altas onde a convergência meridiana é maior.

FIGURA 20 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA  $\Delta Z = 200\text{m}$  NA TS-3D



A direção dos vetores de deslocamento aparente dos pontos pode ser constatada na Figura 21. Observa-se na Figura 21 a situação do ponto  $p$  no quadrante Sudeste do Fuso-0 quando é aplicada uma translação  $\Delta Z$  na TS-3D. Com linha segmentada apresenta-se o elipsóide e o SGC velho ou original ( $XYZ$ ), e com linha contínua o novo SGC ( $X'Y'Z'$ ) e o elipsóide nele referenciado.

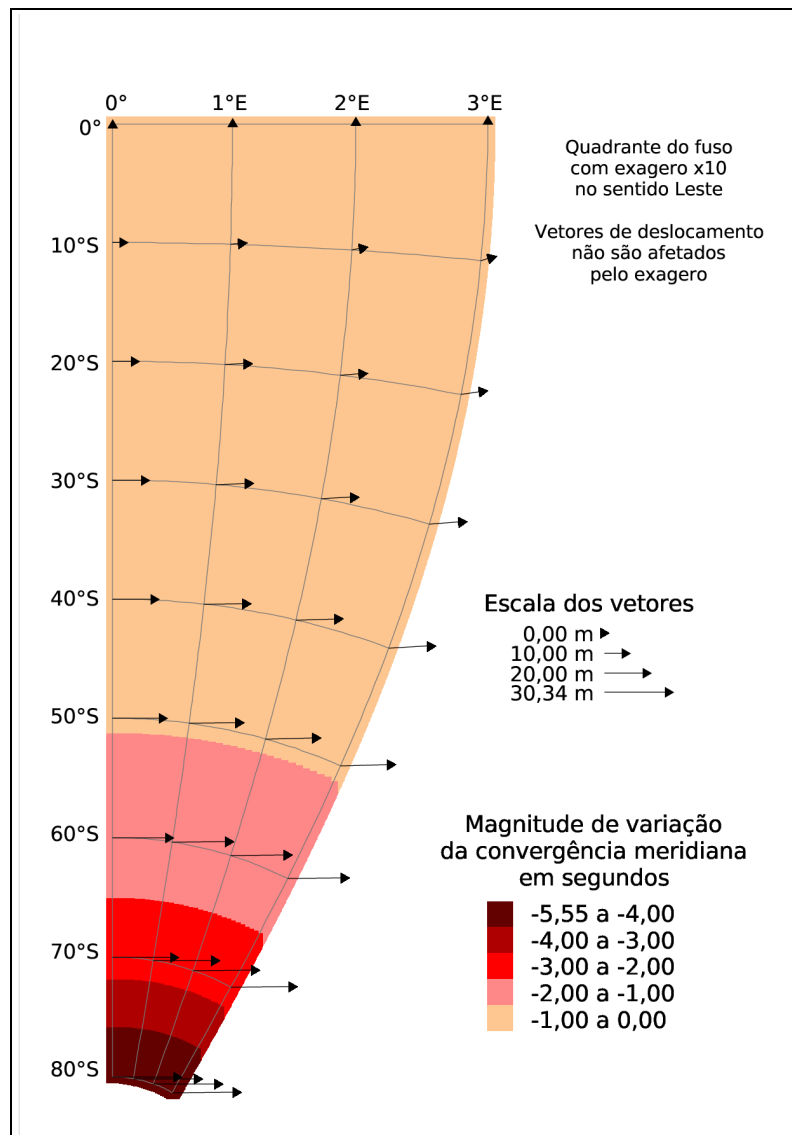
FIGURA 21 – SITUAÇÃO DE UM PONTO  $p$  PARA UMA TRANSLAÇÃO  $\Delta Z$  NA TS-3D(a) vista ortogonal à secção meridiana no ponto  $p$  (b) vista ortogonal ao plano  $XY$  do SGC

Na Figura 21, o ponto  $p$  referenciado no novo SGC, apresenta uma latitude comparativamente menor à latitude do mesmo ponto  $p$  quando referenciada no SGC original (Figura 21a ). Esta situação gera uma diminuição do valor da componente  $y$  das coordenadas de projeção para o ponto  $p$ . Ademais, um menor valor da latitude para o ponto  $p$ , apresenta um arco de paralelo maior (Figura 21b ), e portanto um incremento no valor da componente  $x$  das coordenadas de projeção.

#### 4.1.4 Teste 4 – Rotação de -1” no eixo X do SGC

O teste 4 corresponde à aplicação de uma rotação  $\omega_x$  de -1” na TS-3D. Na Figura 22 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se que as magnitudes da variação da convergência meridiana apresentam-se maiores com o aumento da latitude. Ademais, observa-se que a maior parte da superfície do quadrante do fuso apresenta valores de magnitude de variação da convergência meridiana inferiores a 1”.

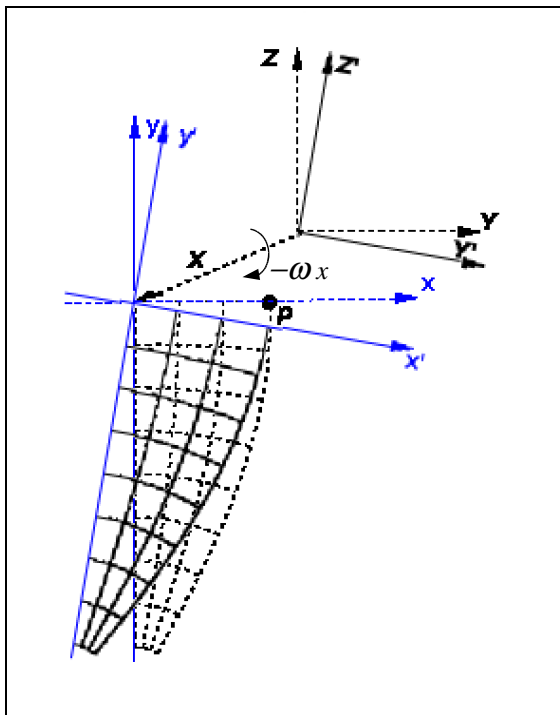
FIGURA 22 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA  $\omega_x = -1''$  NA TS-3D



Os vetores de deslocamento apresentam-se com magnitudes maiores em latitudes altas em comparação aos vetores próximos ao Equador. Vetores em latitudes altas apresentam, em geral, valor da componente  $x$  das coordenadas de projeção maior com respeito à componente  $y$ . Em latitudes próximas ao Equador, o valor das componentes  $x$  e  $y$  decresce e a componente  $y$  supera em valor à componente  $x$ . Assim apresentam-se como pequenos vetores com direção Norte. A magnitude e a direção dos vetores de deslocamento aparente dos pontos podem ser constatadas na Figura 23.

Na Figura 23 apresenta-se a situação de um ponto  $p$  no quadrante Sudeste do Fuso-0 para uma rotação  $-\omega x$  na TS-3D. Observa-se na figura, que para um ponto nas proximidades do Equador o deslocamento aparente do ponto apresentará uma componente  $x$  inferior à componente  $y$  nas coordenadas de projeção. Mas para um ponto nas latitudes altas a componente  $x$  será maior do que a componente  $y$  das coordenadas de projeção.

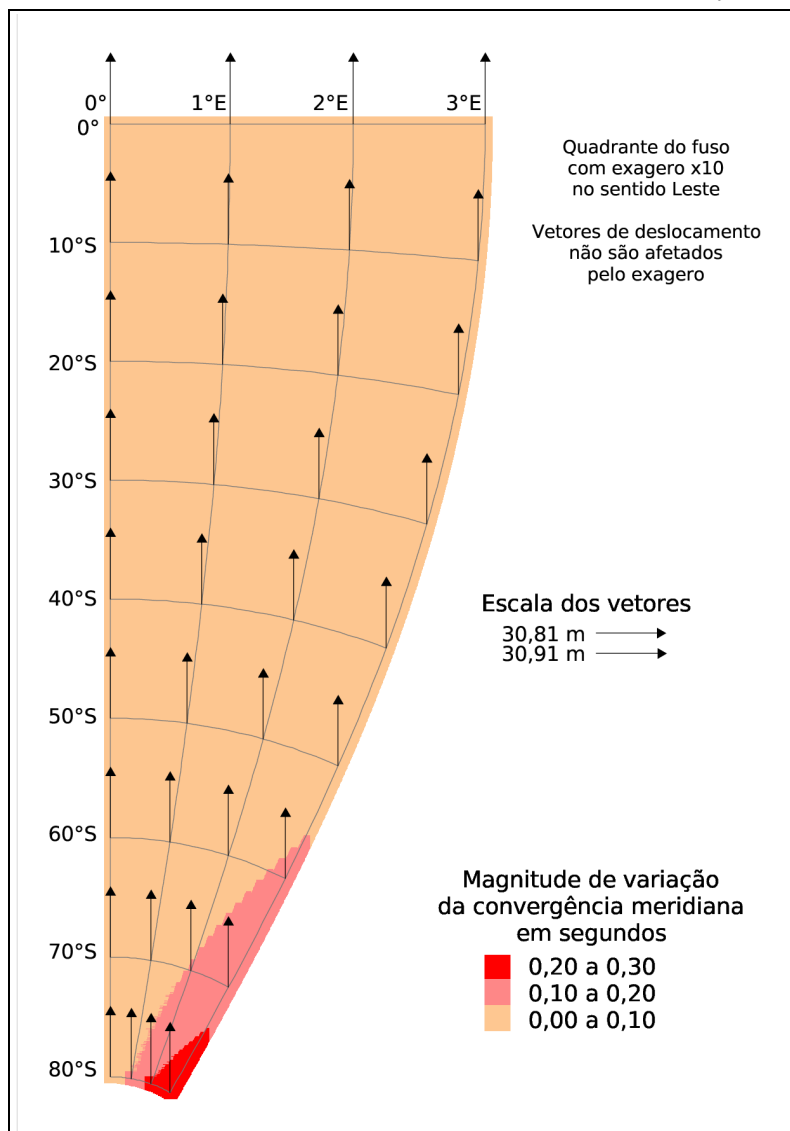
FIGURA 23 – SITUAÇÃO DE UM PONTO  $p$  NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA UMA ROTAÇÃO DE  $-\omega x$  NA TS-3D



#### 4.1.5. Teste 5 – Rotação de 1" no eixo Y do SGC

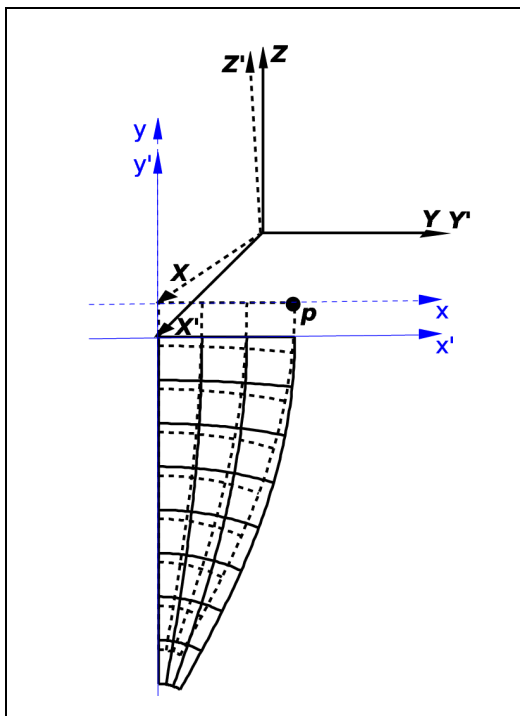
O teste 5 corresponde à aplicação de uma rotação  $\omega_y$  de 1" na TS-3D. Na Figura 24 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se que as magnitudes da variação da convergência meridiana apresentam-se com valores inferiores a 0,2" na maior parte do quadrante do fuso, em decorrência de que o deslocamento aparente dos pontos ocorre no sentido das latitudes, enquanto a convergência meridiana, no fuso UTM, aumenta predominantemente em relação ao aumento da longitude com respeito ao meridiano central do fuso.

FIGURA 24 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA  $\omega_y=1''$  NA TS-3D



Na Figura 25 podem ser constatadas a magnitude e direção do deslocamento para um ponto  $p$  no quadrante Sudeste do Fuso-0. Na Figura 25 apresenta-se a situação de um ponto  $p$ , no quadrante Sudeste do Fuso-0, quando é aplicada uma rotação  $\omega_y$  na TS-3D. Com linha segmentada apresentam-se o SGC original ( $XYZ$ ) e o quadrante Sudeste do Fuso-0 nele referenciado; e com linha contínua o novo SGC ( $X'Y'Z'$ ) e o quadrante Sudeste do Fuso-0 nele referenciado. O ponto  $p$  projetado no fuso e referenciado no novo SGC apresenta um valor na componente  $y$  das suas coordenadas de projeção maior ao valor da componente  $y$  no fuso referenciado no SGC original.

FIGURA 25 – SITUAÇÃO DE UM PONTO  $p$  NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA UMA ROTAÇÃO  $\omega_y$  NA TS-3D



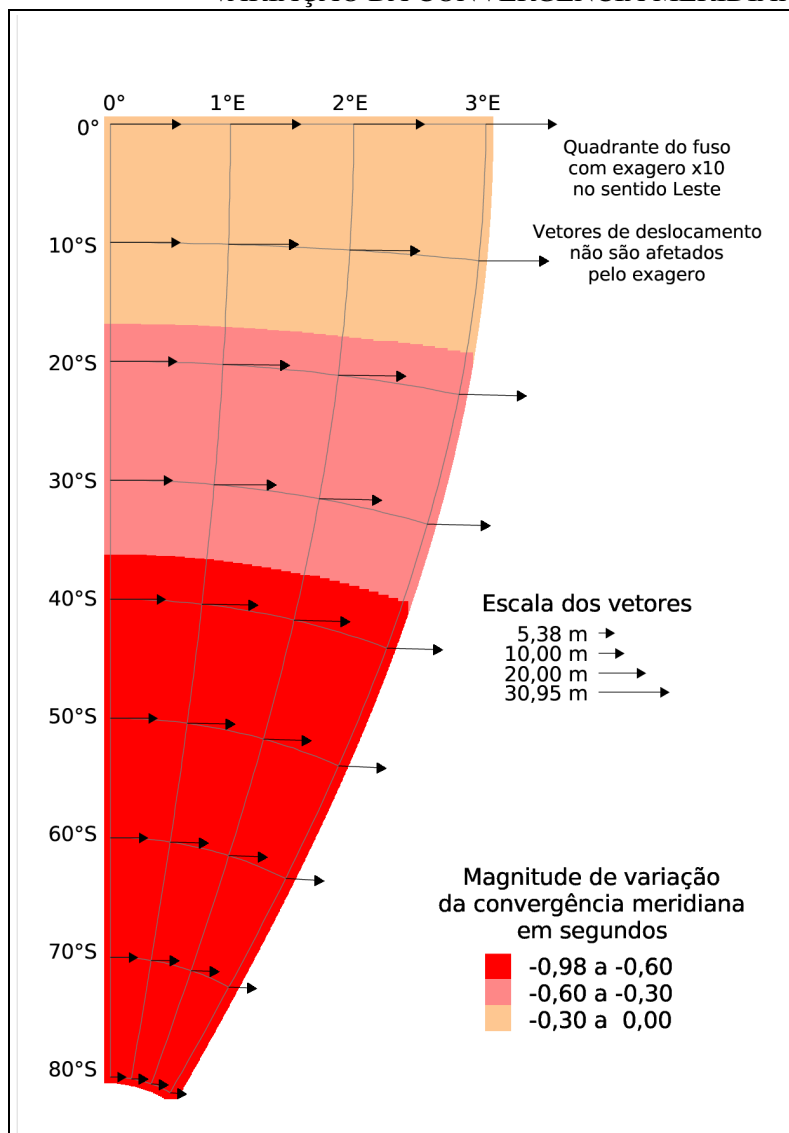
#### 4.1.6 Teste 6 - Rotação de $-1''$ no eixo Z do SGC

O teste 6 corresponde à aplicação de uma rotação  $\omega_z$  de  $-1''$  na TS-3D. Na Figura 26 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se na figura que as magnitudes da variação da



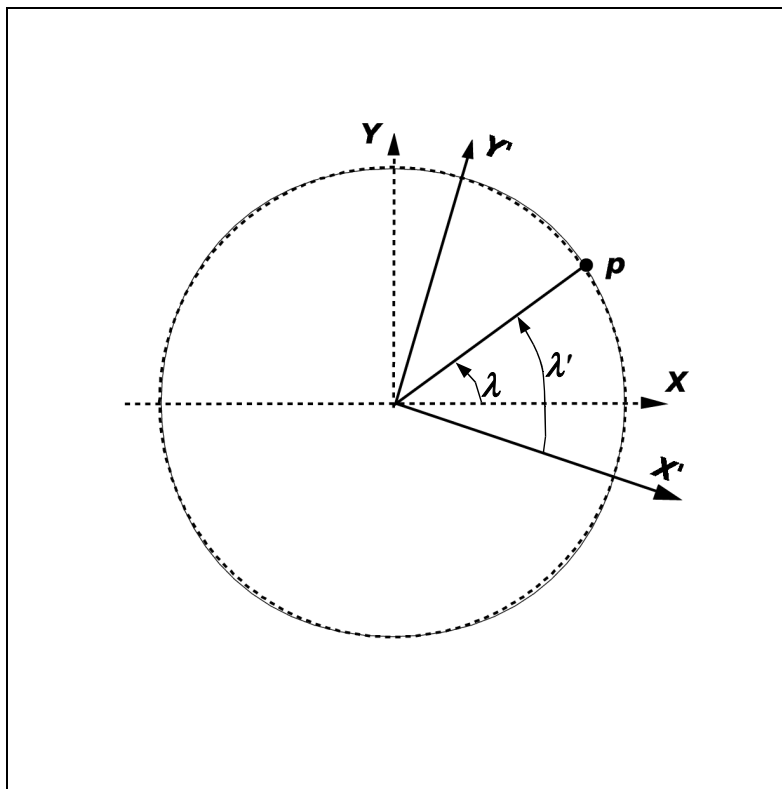
convergência meridiana apresentam-se com valor maior a 0,3'' na maior parte do quadrante do fuso. Os deslocamentos aparentes dos pontos são, em geral, no mesmo sentido e direção do eixo x do plano de projeção. Apresentam-se magnitudes de variação da convergência meridiana maior em latitudes altas e menores em latitudes próximas ao Equador.

FIGURA 26 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA  $\omega_z = -1''$  NA TS-3D



Na Figura 27 pode ser constatada a magnitude e a direção do deslocamento para um ponto  $p$  no quadrante Sudeste do Fuso-0. Na figura apresenta-se a vista ortogonal ao plano  $XY$  do SGC, e a situação de um ponto  $p$  quando é aplicada uma rotação  $-\omega_z$  na TS-3D. Com linha segmentada apresentam-se o SGC original ( $XYZ$ ), e com linha contínua o novo SGC ( $X'Y'Z'$ ). O ponto  $p$ , referenciado no novo SGC apresenta longitudes com respeito do meridiano central do Fuso-0 maiores que as longitudes referidas no SGC original. Ademais, as diferenças entre as longitudes diminui na medida que aumenta a latitude. Assim, os deslocamentos aparentes dos pontos serão menores nas latitudes altas e maiores em latitudes próximas ao Equador.

FIGURA 27 – SITUAÇÃO DO PONTO  $p$  PARA UMA ROTAÇÃO  $-\omega_z$  NA TS-3D



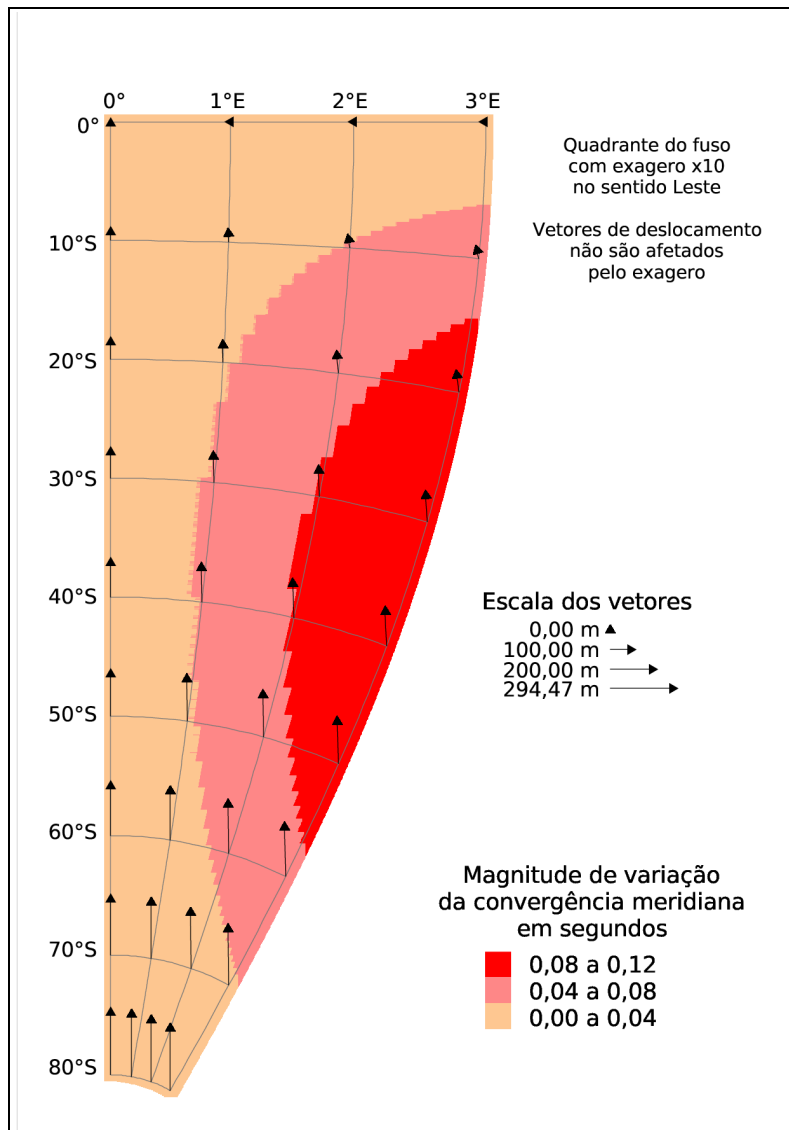
#### 4.1.7 Teste 7 – Diferença relativa de escala de 1ppm na TS-3D

O teste 7 corresponde à aplicação de uma diferença relativa de escala  $\delta m$  de 1ppm na TS-3D. Uma diferença de escala de 1 ppm apresentou deslocamentos máximos de 21mm. Portanto a convergência não apresenta variação significativa.

#### 4.1.8 Teste 8 - Mudança de elipsóide: Hayford a GRS80

O teste 8 corresponde à aplicação de uma mudança de elipsóide, de Hayford a GRS80. Na Figura 28 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se na figura que a totalidade da superfície do quadrante do fuso apresenta magnitude de variação da convergência meridiana inferior a 1". Esta situação deve-se principalmente a que o deslocamento aparente dos pontos é predominantemente no sentido das latitudes, enquanto o valor absoluto da convergência meridiana no fuso UTM aumenta, predominantemente, em relação ao aumento da longitude com respeito ao meridiano central do fuso. Observa-se, ademais, que o deslocamento aparente dos pontos é menor em latitudes próximas ao Equador e é maior em latitudes altas, e todas em direção ao ponto central do fuso. A magnitude e orientação dos vetores de deslocamento obedece às diferenças nas dimensões dos elipsóides. O elipsóide de Hayford, de origem, apresenta valores maiores para seus semi-eixos em comparação com o elipsóide GRS80. Assim, os arcos de meridiano e de paralelo para pontos homólogos em ambos os elipsóides apresentaram valores de magnitude maiores quando mensurados no elipsóide de Hayford em comparação a quando mensurados no GRS80. A situação descrita gera deslocamentos comparativamente maiores em latitudes altas e menores em latitudes próximas ao Equador, e todos são orientados em direção ao ponto central do fuso.

FIGURA 28 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80.

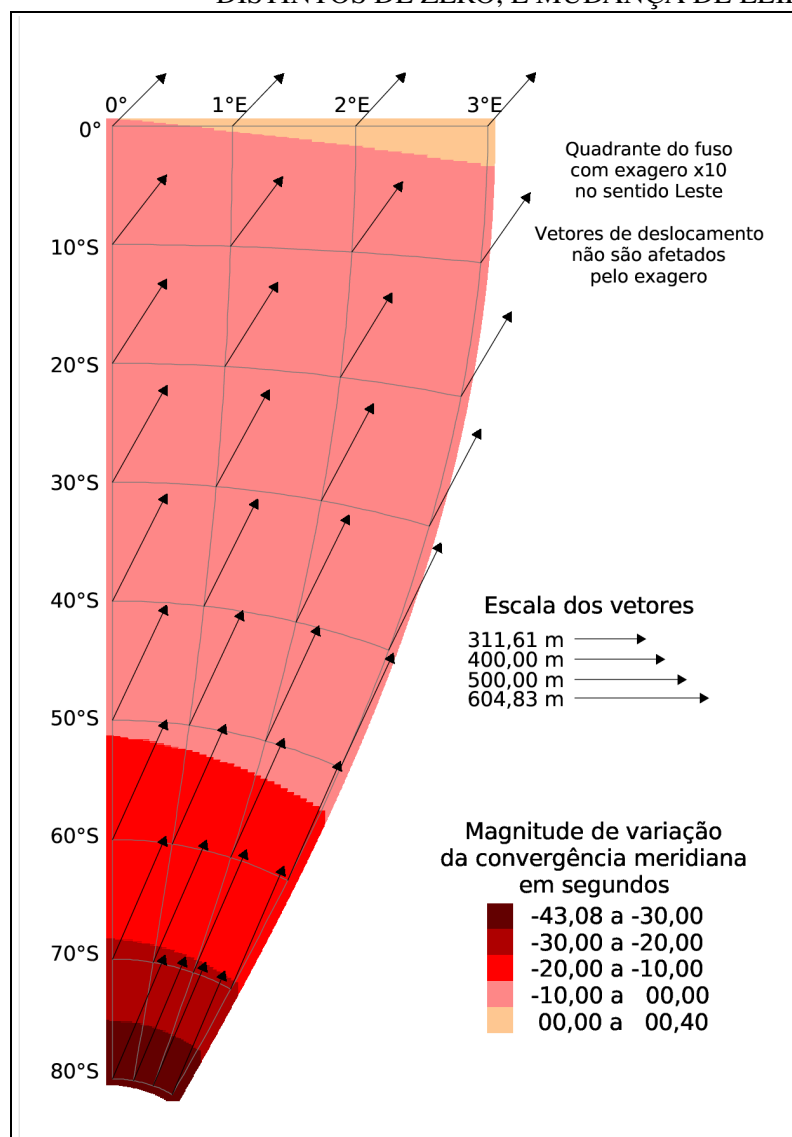


4.1.9 Teste 9 – Transformação com todos os parâmetros distintos de zero na TS-3D e mudança de elipsóide: de Hayford a GRS80.

O teste 9 corresponde à aplicação da TS-3D com  $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 200 \text{ m}$ ,  $\omega_x = -1''$ ,  $\omega_y = 1''$ ,  $\omega_z = -1''$  e  $\delta m = 1 \text{ ppm}$  na TS-3D, e uma mudança de elipsóide de Hayford para GRS80. Na Figura 29 apresentam-se os vetores de deslocamento aparente de pontos e a

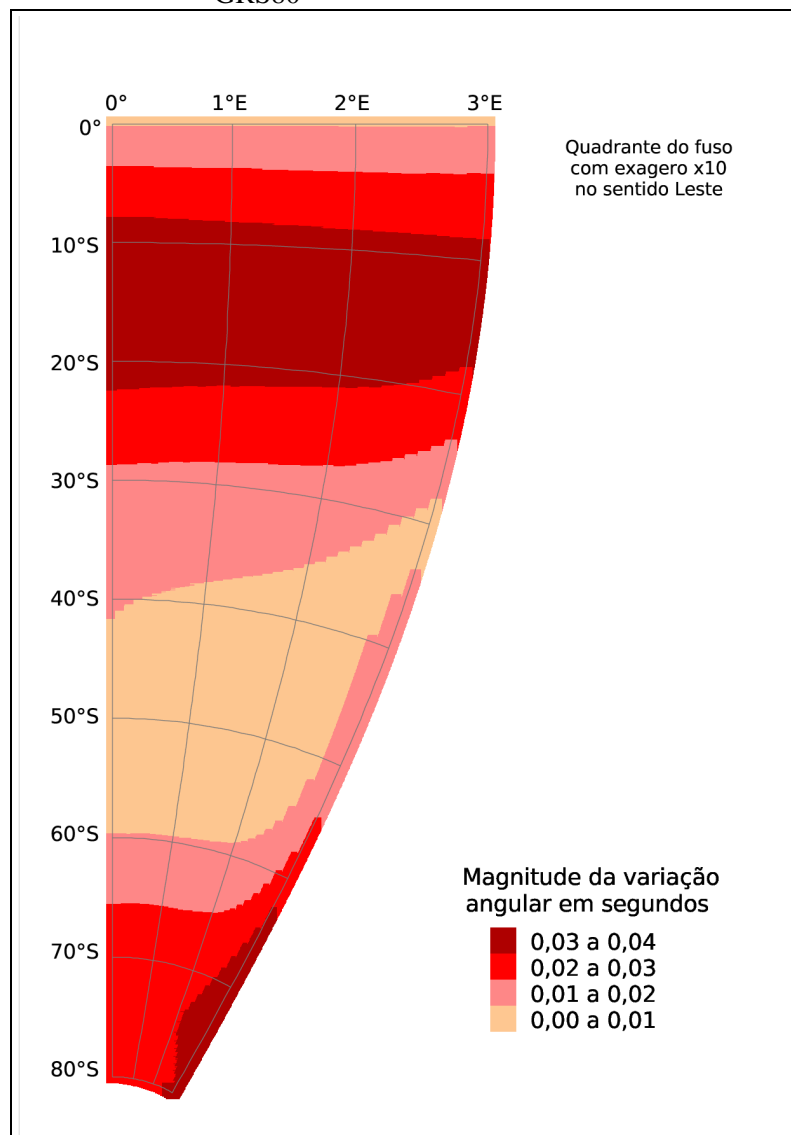
magnitude de variação da convergência meridiana. Observa-se na figura que os deslocamentos acontecem em magnitudes maiores que 300m e menores que 605m, com direção em geral Nordeste. As magnitudes de variação da convergência meridiana, em geral, são maiores às apresentadas nos testes anteriores. Este fato deve-se aos deslocamentos serem maiores do que nos testes anteriores, e a direção dos deslocamentos favorece em uma variação maior da convergência meridiana.

FIGURA 29 - VETORES DE DESLOCAMENTO APARENTE DE PONTOS E MAGNITUDE DE VARIAÇÃO DA CONVERGÊNCIA MERIDIANA PARA TS-3D COM PARÂMETROS DISTINTOS DE ZERO, E MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80



Observa-se, ademais, na Figura 29, que nas proximidades do Equador, a magnitude da variação da convergência meridiana apresenta valores positivos (intervalo de 0,00'' a 0,40''). Esta situação decorre do fato de que a magnitude da convergência no fuso UTM diminui nas proximidades do Equador, e aumenta com a latitude e também com o aumento da longitude ao meridiano central, a exceção da convergência meridiana para pontos situados no Equador, pois no Equador a convergência meridiana é nula. Assim um deslocamento aparente de pontos, como os apresentados no Teste 9, a componente  $y$  no vetor de deslocamento tem uma contribuição maior na variação da convergência meridiana que a componente  $x$ .

FIGURA 30 - VARIAÇÃO ANGULAR ENTRE DIREÇÕES ORTOGONAIS PARA TS-3D COM PARÂMETROS DISTINTOS DE ZERO E MUDANÇA DE ELIPSÓIDE: HAYFORD A GRS80



A Figura 30 apresenta a variação angular entre direções ortogonais. Observa-se nesta figura que, para todo o quadrante do fuso, a variação angular é inferior ou igual a  $0,04''$ . A superfície do quadrante do fuso, na região delimitada entre os  $40^{\circ}\text{S}$  e os  $60^{\circ}\text{S}$ , apresenta uma variação angular inferior a  $0,01''$ . As maiores variações apresentam-se aproximadamente entre os paralelos  $10^{\circ}\text{S}$  e  $20^{\circ}\text{S}$ , e em uma pequena superfície, comparada com a anterior, no extremo Sudeste do fuso. Considerando que a variação do ângulo é mensurada no plano de projeção, entre as direções a pontos distanciados de 5.000 metros, uma variação angular igual de  $0,04''$  implica em um deslocamento relativo dos pontos de 1mm. Sendo assim, as variações angulares não são significativas para propósitos cartográficos, e, portanto, pode-se considerar que as formas permanecem inalteradas.

#### 4.1.10 Valores mínimos e máximos obtidos nos testes 1 ao 9

As magnitudes extremas do deslocamento aparente dos pontos, para cada teste realizado com a TS-3D, e com a mudança de elipsóide, são apresentados na Tabela 4. Os valores na tabela são expressos em valores absolutos.

Observa-se, na Tabela 4, que para o Teste 1, uma translação  $\Delta X$  de 200m na TS-3D gera valores máximos de 196,898m no deslocamento aparente dos pontos na projeção. A componente  $y$  das coordenadas de projeção apresentam os valores máximos de variação, 196,898m, e em magnitude muito superior ao valor máximo na componente  $x$  (10,477m). Observa-se, ademais, que a componente  $y$ , das coordenadas de projeção, não é afetada quando há uma translação  $\Delta Y$  de 200m na TS-3D (Teste 2). Uma translação  $\Delta Z$  de 200m (Teste 3) gera deslocamentos maiores na componente  $y$  em comparação com a componente  $x$ . No caso das rotações, testes 4, 5 e 6, observa-se efeitos inversos, em relação às translações, nas magnitudes máximas das componentes das coordenadas de projeção. Assim, para rotações em  $\omega_x$  de  $-1''$ , variações máximas nas componentes das coordenadas de projeção estão presentes na componente  $x$ . Para rotações  $\omega_y=1''$ , variações máximas apresentam-se na componente  $y$ , enquanto a componente  $x$  quase não apresenta variações.

Rotações  $\omega_z$  de  $-1''$  na TS-3D afetam a componente  $x$  com magnitudes superiores às da componente  $y$ .

TABELA 4 – MAGNITUDES EXTREMAS DE DESLOCAMENTO APARENTE DOS PONTOS PARA CADA TESTE

Testes	Parâmetros	Magnitudes em valores absolutos					
		$\Delta x \min$	$\Delta x \max$	$\Delta y \min$	$\Delta y \max$	$d \min$	$d \max$
1	$\Delta X=200m$	0,000	10,477	0,000	196,898	0,000	196,898
2	$\Delta Y=200m$	199,920	199,922	0,000	0,000	199,920	199,922
3	$\Delta Z=200m$	0,000	5,239	34,672	200,196	34,717	200,196
4	$\omega_x=-1''$	0,000	30,338	0,000	1,620	0,000	30,338
5	$\omega_y=1''$	0,000	0,004	30,809	30,910	30,809	30,910
6	$\omega_z=-1''$	5,378	30,952	0,000	0,811	5,385	30,952
7	$\delta m=1ppm$	0,000	0,001	0,000	0,021	0,000	0,021
8	Hayford a GRS80	0,000	13,148	0,000	294,468	0,000	294,472
9	Todos	207,234	243,553	230,814	556,845	311,609	604,833

$\Delta x \min/\max$ : variação mínima/máxima da coordenada  $x$  dos pontos em metros

$\Delta y \min/\max$ : variação mínima/máxima da coordenada  $y$  dos pontos em metros

$d \min/\max$ : magnitude de deslocamento mínimo/máximo dos pontos em metros

Para todas as rotações nos testes 4, 5 e 6 observa-se valores máximos de deslocamento aparente dos pontos próximos a 30 metros. No Teste 7, um valor  $\delta m = 1$  ppm na TS-3D gera deslocamentos máximos de 21 mm. No caso de mudança de elipsóide de referência, Teste 8, observa-se que há um impacto maior na componente  $y$  das coordenadas de projeção em relação à componente  $x$ , e ainda maior aos deslocamentos produto de translações de 200m na TS-3D.

Finalmente, observa-se no Teste 9, quando são aplicados conjuntamente todos os valores de parâmetros anteriores na TS-3D e considerando uma mudança de elipsóide, o deslocamento aparente máximo dos pontos atinge um valor de 604,833m, e um valor mínimo de 311,609m. A maior variação nas componentes das coordenadas de projeção observam-se na componente  $y$ , com um valor igual a 556,845m, valor que é notavelmente superior ao valor máximo na componente  $x$  (313,292m maior do que o valor máximo na componente  $x$ ). Este fato obedece ao impacto da mudança do elipsóide de referência no



processo de transformação de coordenadas.

Na Tabela 5 apresentam-se as magnitudes extremas da variação da distorção de escala, da convergência meridiana e do ângulo ortogonal mensurado no plano de projeção, obtidos em cada teste. Observa-se que, para todos os testes, a magnitude de variação da distorção de escala é nula. Isto devido a que, nos testes, os deslocamentos apresentam todos valores inferiores a 605m, valor que é inferior à razão da variação da distorção de escala no fuso UTM (ver Figura 7). Observa-se, ademais, para os testes 1 ao 8, que o teste 2 apresenta uma magnitude da variação da convergência meridiana comparativamente muito maior com respeito aos valores atingidos nos outros testes. Este ocorre devido ao teste apresentar os maiores deslocamentos na componente  $x$  (Tabela 4), isto é, na mesma direção da variação da convergência no fuso.

TABELA 5 – MAGNITUDES EXTREMAS PARA CADA TESTE DA VARIAÇÃO DA DISTORÇÃO DE ESCALA, CONVERGÊNCIA MERIDIANA E DO ÂNGULO ORTOGONAL MENSURADO NO PLANO DE PROJEÇÃO

Testes	Parâmetros	Magnitudes em valores absolutos					
		$\Delta m \min$	$\Delta m \max$	$\Delta C \min$	$\Delta C \max$	$\Delta \alpha \min$	$\Delta \alpha \max$
1	$\Delta X=200m$	0,0000	0,0000	0,000"	1,971"		
2	$\Delta Y=200m$	0,0000	0,0000	0,000"	36,562"		
3	$\Delta Z=200m$	0,0000	0,0000	0,000"	0,341"		
4	$\omega_x=-1''$	0,0000	0,0000	0,003'	5,548"		
5	$\omega_y=1''$	0,0000	0,0000	0,000"	0,299"		
6	$\omega_z=-1''$	0,0000	0,0000	0,000"	0,985"		
7	$\delta m=1ppm$	0,0000	0,0000	0,000"	0,000"		
8	Hayford a GRS80	0,0000	0,0000	0,000"	0,120"		
9	Todos	0,0000	0,0000	0,000"	43,083"	0,000"	0,035"

$\Delta m \min/\max$ : variação mínima/máxima da distorção de escala

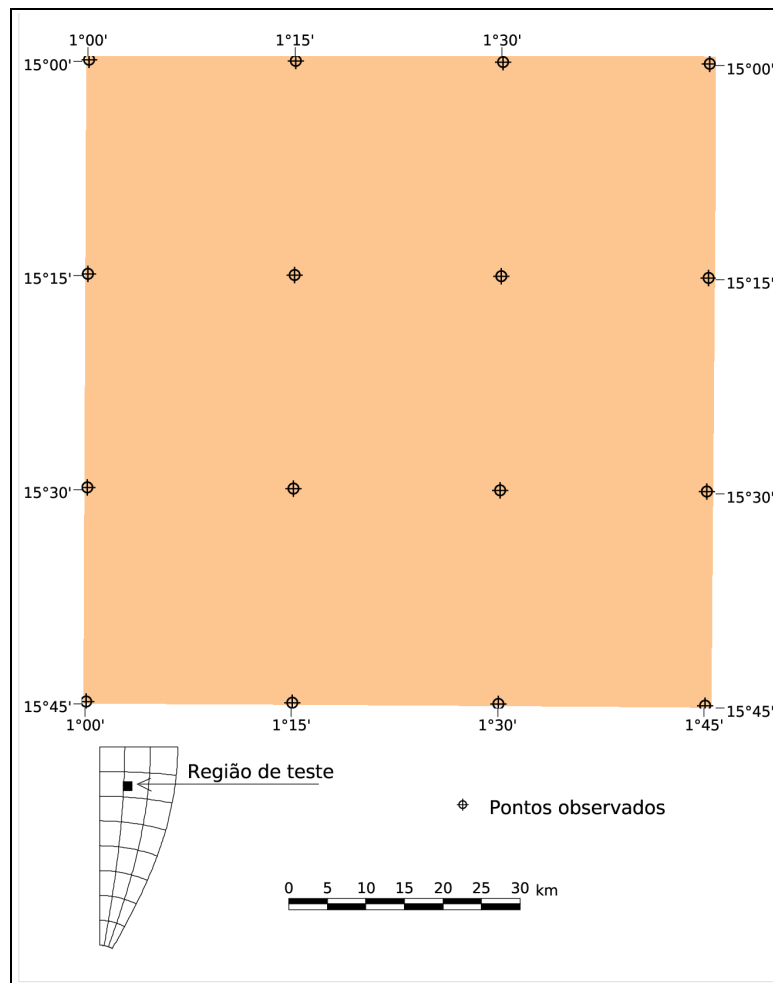
$\Delta C \min/\max$ : variação mínima/máxima da convergência meridiana

$\Delta \alpha \min/\max$ : variação mínima/máxima do ângulo mensurado na projeção

## 4.2 TESTES E ANÁLISES PARA AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO BIDIMENSIONAL

Dois grupos de testes foram realizados: a) ajustamento a partir das observações no quadrante do Fuso-0, e b) ajustamento a partir de observações a 16 pontos na região de teste, especificada em 3.2. Em ambos os grupos as observações são as componentes das coordenadas,  $(x,y)$  ou  $(\phi,\lambda)$ , obtidos a partir das coordenadas dos mesmos pontos utilizados no Teste 9, na avaliação do impacto da mudança de referencial geodésico, e definidos em 3.1. A região de teste corresponde à porção da superfície do Fuso-0 que apresenta as maiores variações angulares observadas no Teste 9. A região é contida entre os  $15^{\circ}00'$  e  $15^{\circ}45'$  de latitude Sul e entre  $1^{\circ}00'$  e  $1^{\circ}45'$  de longitude Este, 75 km x 75 km aproximadamente (Figura 31).

FIGURA 31 – PONTOS OBSERVADOS NA REGIÃO DE TESTE



#### 4.2.1 Ajustamento a partir das observações no quadrante do fuso-0

Os valores de parâmetros e seus desvios-padrões, obtidos no processo de ajustamento para cada modelo funcional, são apresentados na Tabela 6.

TABELA 6 – PARÂMETROS E DESVIOS-PADRÕES DOS PARÂMETROS PARA CADA MODELO DE TRANSFORMAÇÃO APLICADOS NO QUADRANTE DO FUSO-0

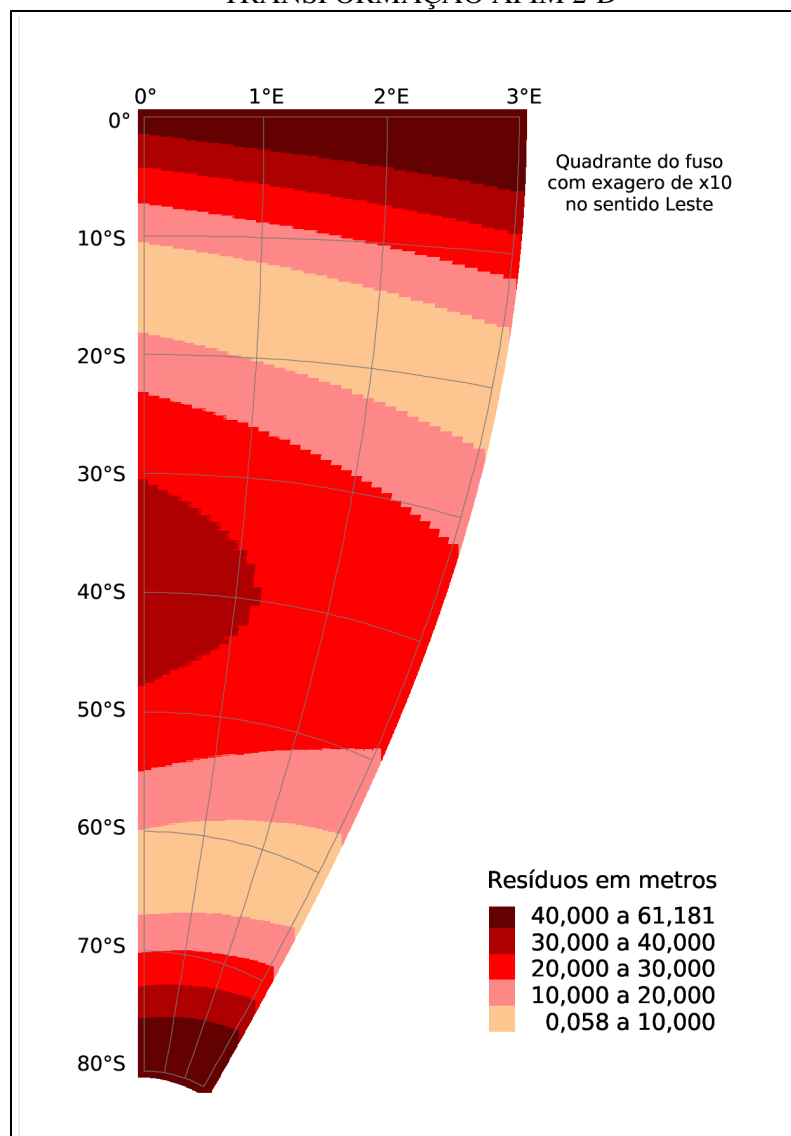
MODELO	Parâmetro	Valor	Desvio-Padrão	MODELO	Parâmetro	Valor	Desvio-Padrão
AFIM GERAL	$a_1$	0,999957064	0,000001534	POLINOMIAL	$a_0$	237,139266986	0,005142450
	$a_2$	0,000043654	0,000001534		$a_1$	0,999963063	0,000000073
	$b_1$	-0,000001378	0,000000051		$a_2$	0,000000000	0,000000000
	$b_2$	0,999962483	0,000000051		$a_3$	-0,000002068	0,000000003
	$c_1$	233,688281578	0,370073849		$a_4$	0,000000000	0,000000000
	$c_2$	278,100883312	0,370073849		$a_5$	0,000000000	0,000000000
SIMILARIDADE	$a$	0,999963154	0,000000045		$a_6$	0,000000000	0,000000000
	$b$	-0,000001512	0,000000045		$a_7$	0,000000000	0,000000000
	$c$	232,376952801	0,231904514		$a_8$	0,000000000	0,000000000
	$d$	286,042901751	0,231904514		$b_0$	478,561919197	0,005142450
PROJETIVA	$a_1$	0,999943286	0,000000211		$b_1$	0,000003700	0,000000073
	$a_2$	-0,000000991	0,000000007		$b_2$	0,000000000	0,000000000
	$a_3$	235,190500992	0,050273819		$b_3$	0,999962995	0,000000003
	$a_4$	0,000000000	0,000000000		$b_4$	0,000000000	0,000000000
	$a_5$	0,000000000	0,000000000		$b_5$	0,000000000	0,000000000
	$a_6$	0,000005009	0,000000367		$b_6$	0,000000000	0,000000000
	$a_7$	0,999924370	0,000000035		$b_7$	0,000000000	0,000000000
	$a_8$	228,408715538	0,080998983		$b_8$	0,000000000	0,000000000
TMM	$FE$	500248,142	0,346				
	$FN$	10000286,230	0,233				
	$\lambda_0$	0,000115363	0,014925805				
	$m_0$	0,999563	0,000000				

Observa-se na Tabela 6 que os desvios-padrões dos parâmetros, isolados de cada modelo, apresentam valores sub métricos:  $c_1$  e  $c_2$  no modelo de Transformação Afim 2-D;  $c$  e  $d$  no modelo da Transformação de Similaridade 2-D;  $a_3$  e  $a_8$  no modelo de Transformação Projetiva 2-D;  $a_0$  e  $b_0$  no modelo de Transformação Polinomial 2-D; e  $FE$ ,  $FN$  no modelo TMM. Ademais, o modelo de Transformação Polinomial 2-D em geral apresenta-se, em comparação aos outros modelos, com os menores desvios-padrões para seus parâmetros. Por outro lado no modelo de Transformação Polinomial 2-D, 12 dos 18 parâmetros apresentam valores iguais a zero, ou seja, somente seis parâmetros foram

suficientes para ajustar o modelo. Situação similar acontece com o modelo da Transformação Projetiva 2-D, dois de oito parâmetros têm valor igual a zero, ou seja, somente seis parâmetros foram suficientes para ajustar o modelo.

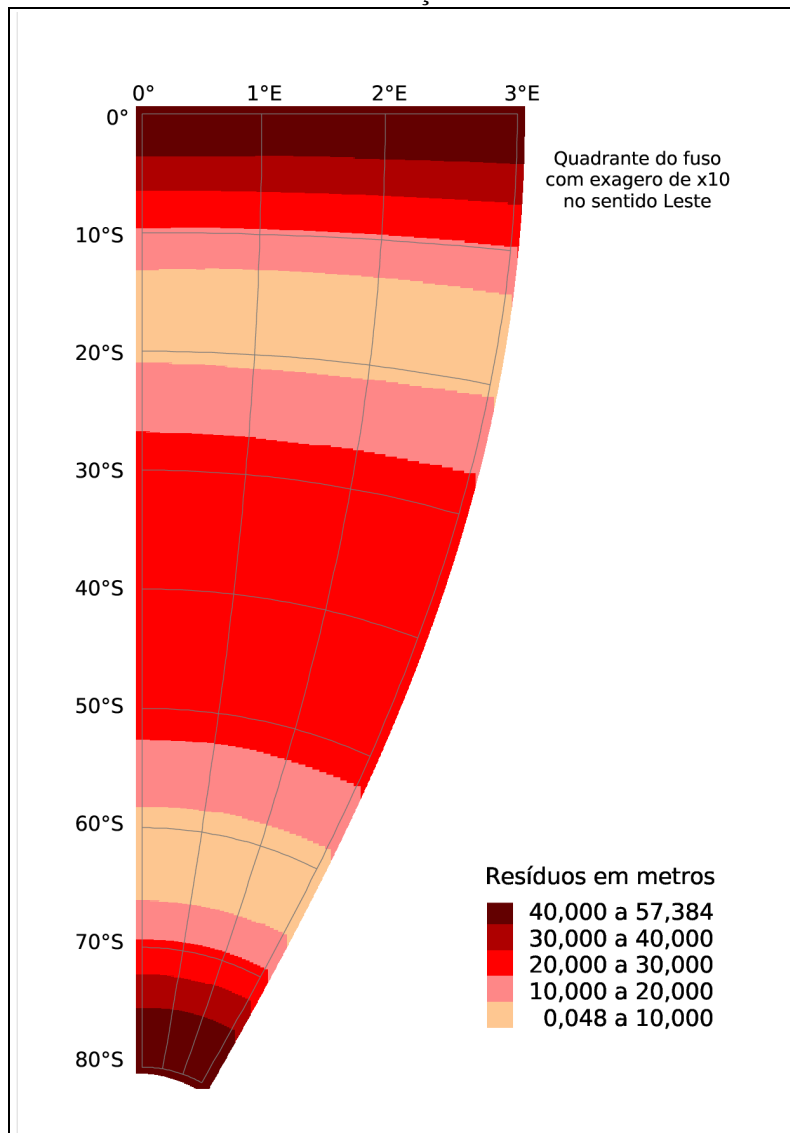
Os resíduos obtidos no processo de ajustamento para o modelo de Transformação Afim 2-D são apresentados na Figura 32. Observa-se na figura que os maiores valores de resíduos apresentam-se nas proximidades do Equador, em latitudes próximas aos 80°S e em latitudes médias e próximas ao meridiano central. Resíduos menores que 10m apresentam-se aproximadamente entre os 10°S e 20°S, e entre os 60°S e 70°S.

FIGURA 32 – RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO AFIM 2-D



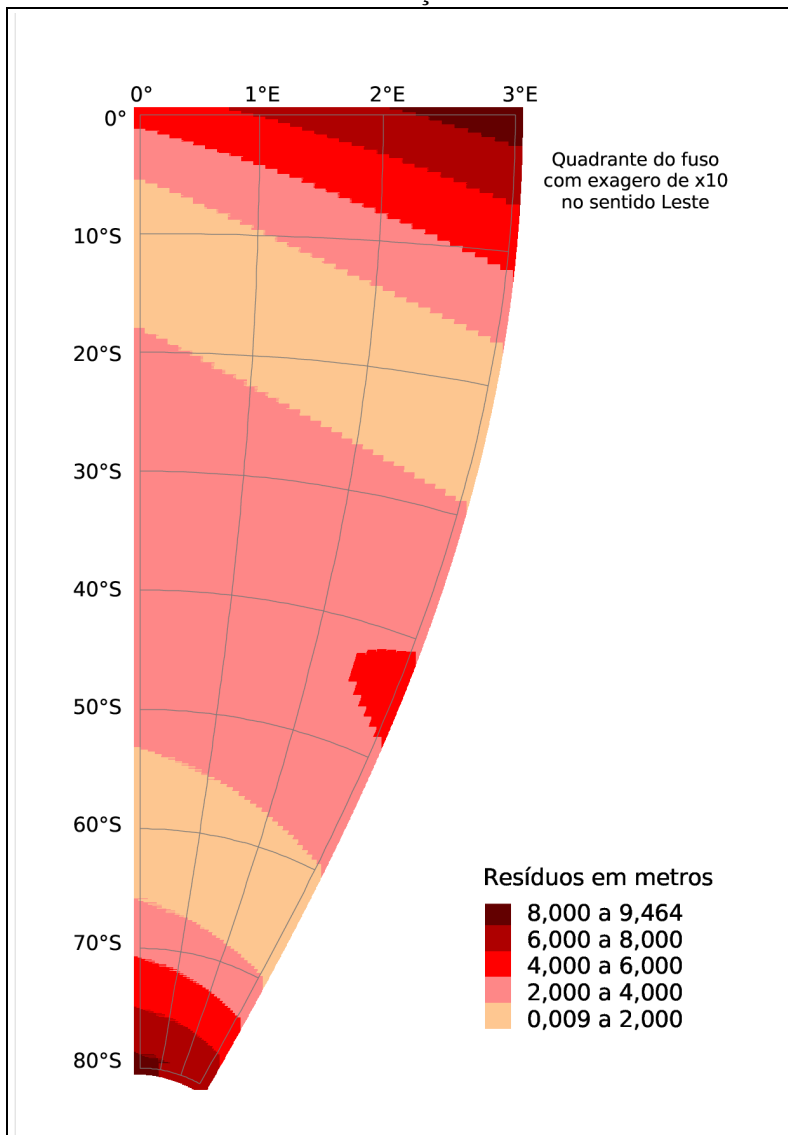
Os resíduos, para o modelo de Transformação de Similaridade 2-D, são apresentados na Figura 33. Observa-se nesta figura que os maiores valores de resíduos apresentam-se nas proximidades do Equador, em latitudes próximas aos 80°S e em latitudes médias, entre os 30°S e 50°S aproximadamente. Observa-se, ademais, uma variação regular do valor dos resíduos no sentido da variação da latitude. Resíduos menores que 10m apresentam-se entre os 10°S e 20°S, e entre os 60°S e 70°S aproximadamente. As magnitudes máximas dos resíduos são similares às magnitudes máximas apresentadas no modelo de Transformação Afim 2-D.

FIGURA 33 – RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO DE SIMILARIDADE 2-D



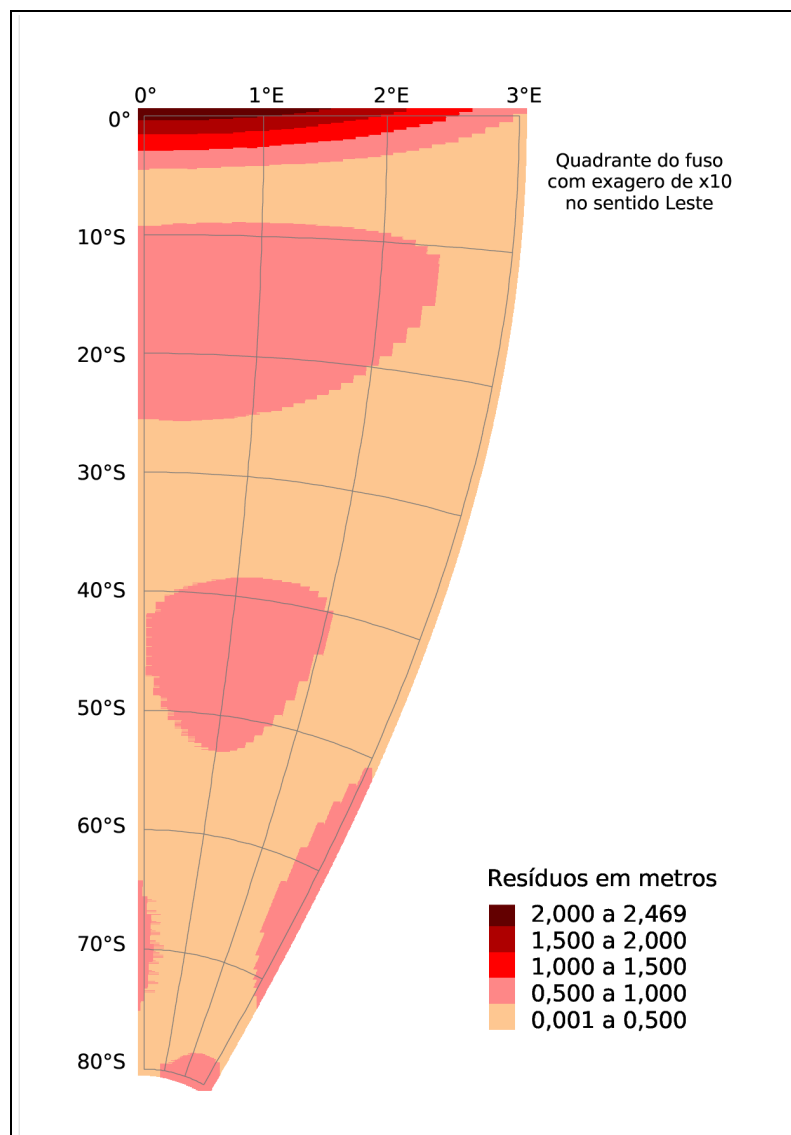
Os resíduos para o modelo de Transformação Projetiva 2-D são apresentados na Figura 34. Observa-se na figura que todo o quadrante do fuso apresenta resíduos menores que 10m. Os maiores valores de resíduos apresentam-se nas proximidades da região Nordeste e Sul-Oeste do quadrante do fuso. Entre as latitudes 10°S e 70°S os valores de resíduos são menores que 4m, à exceção da região na proximidade do meridiano 3°E entre os 40°S e 50°S que apresenta valores de resíduos entre 4 e 6 metros.

FIGURA 34 – RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO PROJETIVA 2-D



Os resíduos para o modelo de Transformação Polinomial 2-D de segundo grau apresentam-se na Figura 35. Todo o quadrante do fuso apresenta resíduos menores que 2,5m. Os maiores valores de resíduos apresentam-se nas proximidades do Equador, e quase a totalidade do quadrante do fuso apresenta valores de resíduos menores que 1m.

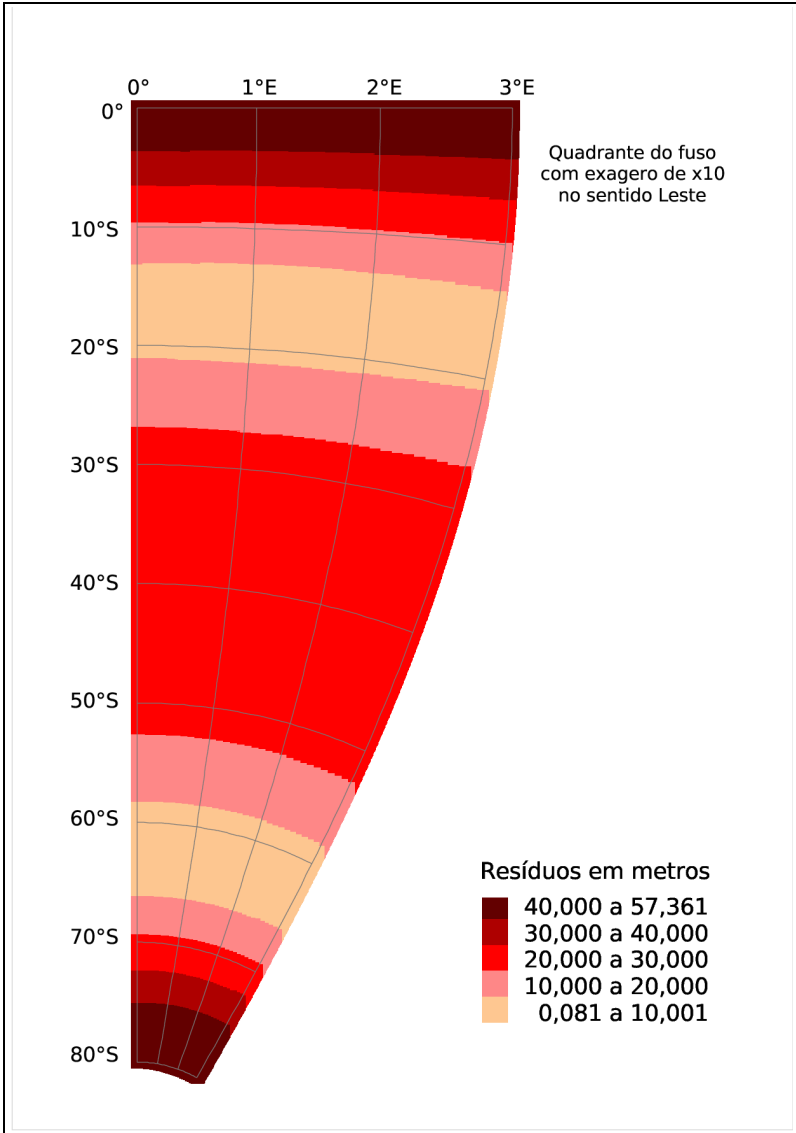
FIGURA 35 – RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO POLINOMIAL 2-D



Os resíduos para o modelo de Transformação TMM são apresentados na Figura 36. Observa-se na figura que os maiores valores de resíduos apresentam-se nas proximidades

do Equador, em latitudes próximas aos 80°S e em latitudes médias, entre os 30°S e 50°S aproximadamente. Observa-se, ademais, uma variação regular do valor dos resíduos no sentido da variação da latitude. Resíduos menores que 10m apresentam-se entre os 10°S e 20°S, e entre os 60°S e 70°S aproximadamente. A variação das magnitudes dos resíduos no quadrante do fuso apresenta-se quase igual à observada no modelo de Transformação de Similaridade 2-D.

FIGURA 36 – RESÍDUOS NO QUADRANTE SUDESTE DO FUSO-0 PARA O MODELO DE TRANSFORMAÇÃO TMM





## 4.2.2 Ajustamento a partir das observações na região de teste

Os valores de parâmetros e desvios-padrões dos parâmetros obtidos no processo de ajustamento para cada modelo funcional são apresentados na Tabela 7. Observa-se que os desvios-padrões dos parâmetros isolados de cada modelo apresentam em geral valores submétricos: especificamente  $c_1$  e  $c_2$  no modelo de Transformação Afim 2-D;  $c$  e  $d$  no modelo da Transformação de Similaridade 2-D;  $a_3$  no modelo de Transformação Projetiva 2-D;  $a_0$  e  $b_0$  no modelo de Transformação Polinomial 2-D; e  $FN$  no modelo TMM. Ademais, o modelo de Transformação Polinomial 2-D em geral apresenta, em comparação aos outros modelos, os menores desvios-padrões para todos seus parâmetros. Por outro lado no modelo de Transformação Polinomial 2-D e no modelo de Transformação Projetiva 2-D, somente seis parâmetros foram suficientes para ajustar o modelo.

TABELA 7 – PARÂMETROS E DESVIO-PADRÃO DOS PARÂMETROS PARA CADA MODELO DE TRANSFORMAÇÃO APLICADO NA REGIÃO DE TESTE

MODELO	Parâmetro	Valor	Desvio-Padrão	MODELO	Parâmetro	Valor	Desvio-Padrão
AFIM	$a_1$	0,999939889	0,000000051	POLINOMIAL	$a_0$	228,976505096	0,000002555
	$a_2$	0,000004456	0,000000051		$a_1$	0,999939889	0,000000000
	$b_1$	-0,000004462	0,000000049		$a_2$	0,000000000	0,000000000
	$b_2$	0,999939500	0,000000049		$a_3$	-0,000004462	0,000000000
	$c_1$	230,265315456	0,084475597		$a_4$	0,000000000	0,000000000
	$c_2$	240,497274952	0,084475597		$a_5$	0,000000000	0,000000000
SIMILARIDADE	$a$	0,999939689	0,000000052		$a_6$	0,000000000	0,000000000
	$b$	-0,000004459	0,000000052		$a_7$	0,000000000	0,000000000
	$c$	230,300222680	0,088895068		$a_8$	0,000000000	0,000000000
	$d$	240,817124082	0,088895068		$b_0$	344,025264838	0,000002555
PROJETIVA	$a_1$	0,999929817	0,000000991		$b_1$	0,000004456	0,000000000
	$a_2$	-0,000003602	0,000000088		$b_2$	0,000000000	0,000000000
	$a_3$	231,737427529	0,149414853		$b_3$	0,999939501	0,000000000
	$a_4$	0,000000000	0,000000000		$b_4$	0,000000000	0,000000000
	$a_5$	0,000000000	0,000000000	$b_5$	0,000000000	0,000000000	
	$a_6$	0,000005532	0,000000999	$b_6$	0,000000000	0,000000000	
	$a_7$	0,999919637	0,000001953	$b_7$	0,000000000	0,000000000	
	$a_8$	223,535537369	1,664982275	$b_8$	0,000000000	0,000000000	
TMM	$FE$	500341,176	1,213				
	$FN$	10000241,459	0,089				
	$\lambda_0$	0,000962809	0,040712709				
	$m_0$	0,999540	0,000000				

Os resíduos máximos e mínimos são apresentados na Tabela 8. Observa-se que todos os resíduos para todos os modelos são inferiores a 25mm, valor que não é significativo para propósitos cartográficos. Assim, e segundo o apresentado em 3.2, os cinco modelos de transformação bidimensional apresentam-se como apropriados para uma mudança de referencial geodésico, pois todos os resíduos são menores que o Erro-Padrão do PEC, para produtos classe A. Assim também, dos cinco modelos, o modelo polinomial é o modelo com melhor desempenho, por conta de apresentar os menores resíduos em toda a região de teste.

TABELA 8 – RESÍDUOS MÁXIMOS E MÍNIMOS PARA OS MODELOS DE TRANSFORMAÇÃO APLICADOS NA REGIÃO DE TESTE

Modelo	Resíduos (metros)	
	Mínimo	Máximo
AFIM	0,000	0,012
SIMILARIDADE	0,000	0,022
PROJETIVA	0,000	0,005
POLINOMIAL	0,000	0,000
TMM	0,000	0,024

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

No presente trabalho foram realizados experimentos para avaliar o impacto da mudança de SGR na geometria das feições presentes nas bases cartográficas, e para avaliar modelos de transformação bidimensional que possam ser usados para a transformação de referencial geodésico de bases cartográficas em escala 1:10.000. Constata-se assim que os objetivos expostos no início do trabalho foram atingidos. A metodologia consistiu na geração de coordenadas na projeção cartográfica UTM e na sua transformação para um sistema cartesiano geodésico (SCG). A seguir foram realizados experimentos com transformação de similaridade no espaço entre sistemas cartesianos geodésicos com a finalidade de quantificar a influência da variação de cada parâmetro da transformação e da mudança de elipsóide. Numa segunda etapa, realizou-se a avaliação das transformações via ajustamentos pelo método paramétrico, com dados das duas superfícies de projeção, isto é, transformações no plano. Nesta segunda etapa ainda foi realizado o ajustamento entre a superfície do elipsóide original e o plano de projeção referenciado ao elipsóide do outro SGR. A análise de resultados foi realizada a partir de dados numéricos resultantes das transformações e dos ajustamentos, bem como pela visualização destes dados e resultados.

### 5.1 CONCLUSÕES

O desenvolvimento dos testes para a avaliação do impacto na geometria das bases cartográficas advindas de uma mudança de referencial geodésico, permitiu constatar que dada uma mudança de referencial geodésico:

- a) uma transformação bidimensional, entre os planos de projeção, requer um esforço computacional menor em comparação ao método de transformação que considera uma Transformação de Similaridade 3-D a partir dos mesmos planos de projeção;

- b) em geral, a variação dos valores de coordenadas de projeção é diferente para cada ponto avaliado no fuso UTM, e diferente para pontos avaliados em diferentes fusos UTM;
- c) as variações extremas dos valores das componentes  $x$  e  $y$  das coordenadas de projeção (deslocamento aparente de pontos) apresentam-se em fusos com meridiano central próximos aos planos XZ e YZ do SCG, o seja, próximos aos meridianos  $0^\circ$ ,  $90^\circ\text{E}$ ,  $90^\circ\text{W}$  e  $\pm 180^\circ$ ;
- d) as magnitudes dos deslocamentos aparentes dos pontos, como os apresentados nos testes, não têm efeitos no valor da distorção de escala para qualquer ponto avaliado num fuso UTM; e
- e) o impacto nas formas não é significativo para produtos cartográficos escala 1:10.000

Por outro lado, os resultados da avaliação dos modelos de transformação bidimensionais permitem concluir que todos os modelos de transformação avaliados apresentam-se como apropriados para transformar coordenadas de projeção, ou geodésicas  $(\phi, \lambda)$  no modelo TMM, a coordenadas de projeção em outro referencial geodésico. Sendo assim, há de ser considerado que um modelo com menor número de parâmetros pode apresentar maior facilidade de uso. Os modelos de Transformação de Similaridade 2-D e o modelo TMM, além de apresentarem resultados, na prática, iguais (distribuição espacial dos resíduos), apresentam a menor quantidade de parâmetros dentre os modelos avaliados. É claro que o modelo TMM apresenta uma expressão matemática tal que a sua implementação no processo de ajustamento requer maior esforço de programação, em comparação aos outros modelos. Embora, diferente dos outros modelos, o modelo TMM apresenta-se apropriado para ser aplicado diretamente a partir de coordenadas geodésicas  $(\phi, \lambda)$ . Isto é proveitoso para usuários de bases cartográficas digitais, referenciadas em coordenadas geodésicas, devido a que a maioria dos Sistemas de Informação Geográfica permitem a parametrização da projeção TM. Sendo assim, os usuários poderiam visualizar seus dados em diferentes referenciais geodésicos sem ser necessário transformar as coordenadas originais nos arquivos computacionais.

## 5.2 RECOMENDAÇÕES

Tendo em vista a análise dos resultados obtidos nos testes, recomenda-se:

- a) desenvolver estudos que permitam determinar o impacto na qualidade posicional das bases cartográficas quando são transformadas com utilização de modelos de transformação bidimensional;
- b) avaliar os cinco modelos de transformação bidimensional, para um caso de estudo, com dados reais, obtidos de bases cartográficas em escala 1:10.000; e
- c) desenvolver aplicativos que permitam transformar as bases cartográficas, entre referenciais geodésicos, utilizando diversos modelos bidimensionais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANCIÃES, C. L. C. & OLIVEIRA, L. C. de. **Transformação entre redes geodésicas: considerações sobre os espaços 3D e 2D**. Série em Ciências Geodésicas, v.3, pp. 85-104, 2003

BLACHUT, T. J.; CHRZANOWSKI, A.; SAASTAMOINEN, J. H. **Cartografía y Levantamientos Urbanos**, New York: Springer-Verlag, 1979. 519 p.

CASTAÑEDA F., R. M. **Ensaio para definição de parâmetros de transformação entre o SAD69 e o NSWC 9Z2**, Curitiba, 1986. 180 p.

CASTRO, A. L. P. de; PEREZ, J. A. S.; MARINI, M. C.; MONICO, J. F. G.; CAMARGO, P. de O. **Estimativa de Parâmetros de Transformação entre Sistemas Geodésicos: estudo do caso SAD69 e SIRGAS**. Série em Ciências Geodésicas, v. 1, pp. 62-81. 2001

CONCAR - Comissão Nacional de Cartografia, **Normas Técnicas da Cartografia Nacional**, Decreto N°89.817, de 20 de junho de 1984. Disponível em: <<http://www.concar.ibge.gov.br/indexf7a0.html?q=node/41>> Acesso em 24/01/2007.

COSTA M. F. **Uma Proposta para Compatibilização entre Referenciais Geodésicos**. Curitiba, 1999, 117 p. Dissertação (Mestrado em Geociências) Departamento de Geomática. Universidade Federal do Paraná.

COSTA, S. M. A. **Integração da Rede Geodésica Brasileira aos Sistemas de Referência Terrestres**. Curitiba 1999. 157 p. Tese (Doutorado em Geociências). Departamento de Geomática. Universidade Federal do Paraná.

CRIOLLO, A. R. T. ; DALAZOANA, R. ; DE FREITAS, S. R. C. **O uso de redes neurais artificiais para melhorar a transformação de coordenadas entre redes geodésicas de referência clássicas**. In: IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, 2005, Curitiba. Anais do IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas. Curitiba: CPGCG, 2005. v. 1. p. 1-6.

DALAZOANA, R, **Implicações na cartografia com a evolução do Sistema Geodésico Brasileiro e futura adoção do SIRGAS**. Curitiba, 2001. 122 p. Dissertação (Mestrado em Ciências Geodésicas). Departamento de Geomática. Setor Ciências da Terra. Universidade Federal do Paraná.

DALAZOANA, R. & FREITAS, S.R.C. **Efeitos na cartografia devido a evolução do sistema geodésico brasileiro e adoção de um referencial geocêntrico**. In: Revista Brasileira de Cartografia, 54, pp. 66-76, 2002

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por Mínimos Quadrados**, Segunda Edição. Curitiba: Imprensa Universitária – UFPR, 2004. 176 p.

FEATHERSTONE, W. E.; GALLOWAY, D.; GOULDING, P.; REIT, B. G. **Transformation between Australian datums using a modified Transverse Mercator Projection**, Cartography, v. 28, n. 1, June 1999. pp. 19-31.

GEMAEL, C. **Geodésia Celeste**. Curitiba: Editora UFPR, 2004. 389 p.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**. Curitiba: Editora UFPR, 1994. 319 p.

GUIMARÃES, I.; PEREIRA, K. D.; FREITAS, L.; AUGUSTO M. J. C.; MARANHÃO M.; ARAÚJO, V. H.; AZEVEDO, J. B.; FREITAS, A. L. B. **O PMRG e a cartografia – uma visão crítica**, XXI Congresso Brasileiro de Cartografia, Belo Horizonte, 2003. Disponível em: <[http://www.cartografia.org.br/xxi\\_cbc.htm](http://www.cartografia.org.br/xxi_cbc.htm)> Acesso em: 01/08/2006

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Ajustamento da rede planimétrica do sistema geodésico brasileiro**. Relatório. Julho 1996, 95 p.

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Sistema de Referência Geocêntrico para a América do Sul**. Relatório Final. Grupos de Trabalho I e II. Rio de Janeiro, 1997. 99 p.

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Resolução do Presidente do IBGE N° 1/2005 – Altera a caracterização do Sistema Geodésico Brasileiro**. Disponível em:<[http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default\\_normas.shtm](http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/default_normas.shtm)> acesso em: 15/05/2006 (a)

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **PMRG - Projeto Mudança do Referencial Geodésico, Estrutura organizacional**. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/pmrg/estrutura.shtm?c=12>> Acesso em: 01/06/2006 (b)

IBGE – Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Mapas Interativos**. 2005 Disponível em: <<http://mapas.ibge.gov.br>> Acesso em: 15/01/2007

IERS - International Earth Rotation and Reference Systems Service. **IERS Technical Note No.32: IERS Conventions (2003)**, Frankfurt, 2004, 127 p.

KNIPPERS, R.; HENDRIKSE, J. **Co-ordinate Transformations**, 2006. Disponível em: <<http://www.kartografie.nl/geometrics/Coordinate%20transformations/coordtrans.html>> Acesso: maio de 2006.

LUGNANI, J. B. **Introdução à Fototriangulação**. Curitiba: Impresso na Imprensa Universitária da UFPR, 1987, 134 p.

MIRANDA, E. E. de; GOMES, E. G. GUIMARÃES, M. **Mapeamento e estimativa da área urbanizada do Brasil com base em imagens orbitais e modelos estatísticos**. Campinas: Embrapa Monitoramento por Satélite, 2005. Disponível em : <<http://www.urbanizacao.cnpm.embrapa.br>>. Acesso em: 24/01/ 2007.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, fundamentos e aplicações**. São Paulo: Editora UNESP, 2000. 287 p.

OLIVEIRA, L.; **Pesquisa de Opinião sobre Transformação de Sistemas Geodésicos**. Projeto Mudança do Referencial Geodésico, Grupo de Trabalho 3. 2002. Disponível em : <[http://www2.prudente.unesp.br/dcartog/gt3/Pesquisa\\_GT3.pdf](http://www2.prudente.unesp.br/dcartog/gt3/Pesquisa_GT3.pdf)> Acesso em 20/07/2006

OLIVEIRA, L. C. de. **Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro Associadas ao SAD 69 – Uma Proposta Metodológica de Transformação**. São Paulo, 1998, 197 p. Tese (Doutorado em Engenharia). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

PEARSON, FREDERICK. **Map projections: theory and applications**, CRC Press Inc., 1990. 372 p.

RAPP H., R. **Geodésica Geométrica**, v. 2, Técnicas Avanzadas, Departamento de Ciencias Geodésicas, Universidad Estatal de Ohio, Columbus, 1981. 196 p.

RICHARDUS, P. & ADLER, R. **Map projections**, Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1972. 174 p.

SIRGAS - Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas, **Boletim Informativo N°6**, 2002. 35 p.

SMITH, J. R. **Introduction to geodesy: the history and concepts of modern geodesy** New York: New York : J.Wiley, 1996. 224 p.

SNYDER, J. **Map Projections – A Working Manual**, U.S. Geological Survey Professional Paper 1395, Washington. 1987. 384 p.

SUBIZA P., W. H. Comunicação pessoal, fevereiro de 2007

SWISS SOCIETY OF CARTOGRAPHIC, **Cartographic Generalisation - Topographic Maps**, second edition, 1987. 62 p.

TORGE, W. **Geodesy**, Second edition. Berlin, New York: W. de Gruyter, 1991. 264p.



VANICEK, P. & KRAKIWSKY, E. **Geodesy: the concepts. Second Edition.** Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1986. 697 p.